

Визуализация движений, идущих по границе трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса

П. А. Васёв¹, А. А. Федотов¹

e-mail: pavel.vasev@gmail.com, andreyfedotov@mail.ru

1. Динамика машины Дубинса на плоскости x, y с симметричными ограничениями на управление описывается системой дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos \varphi, \\ \dot{y} &= \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} &= u, \quad u \in [-1, 1].\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь x, y – координаты геометрического положения объекта; φ – угол направления вектора скорости, отсчитываемый против часовой стрелки от оси x ; u – скалярное управление. Величина линейной скорости равна единице. Предполагается, что $\varphi \in (-\infty, \infty)$.

Множеством достижимости $G(t)$ в момент t называем совокупность всех точек *трёхмерного* фазового пространства, в каждую из которых можно попасть в силу системы (1) в момент t из заданного начального фазового состояния при помощи некоторого допустимого управления. Начальный момент и начальное фазовое состояние полагаем нулевыми. В качестве допустимых управлений принимаем кусочно-постоянные функции времени со значениями из отрезка $[-1, 1]$.

Описание трёхмерных множеств достижимости для рассматриваемой динамики получено в статьях [1, 2]. В настоящее время проводятся работы по визуализации трёхмерных множеств достижимости для машины Дубинса. Начальная стадия таких исследований отражена в [3].

Цель данной работы – продемонстрировать визуализацию экстремальных движений (с возможностью анимации по времени), удовлетворяющих Принципу максимума Понтрягина, которые идут по границе трёхмерного множества достижимости. Разработанный инструмент позволяет видеть расположение текущей фазовой точки $(x(t), y(t), \varphi(t))$ траектории на границе множества достижимости $G(t)$, соответствующего данному моменту времени. Наглядно

¹Институт математики и механики им. Н.Н.Красовского УрО РАН, Екатеринбург

можно проследить, в какие моменты движение находится на гладком участке границы, в какие – на ребре негладкости границы и т.д.

Представляют интерес траектории, которые после некоторого соответствующего момента времени t_* уже не могут быть продолжены движениями, идущими по границе множества достижимости: для любого допустимого управления при $t > t_*$ движение оказывается во внутренней части множества достижимости. Возможны также ситуации, когда экстремальное движение, ведущее в некоторый момент t_f в некоторую точку на границе множества $G(t_f)$, не является единственным, причём расщепление движений происходит не обязательно в начальный момент времени. Таким образом, имеем дело с пучком экстремальных движений, выходящих в момент t_0 из одной и той же фазовой точки и приходящих в момент t_f также в одну и ту же фазовую точку.

2. Использовался специальный инструмент визуализации 38parrots [4], адаптированный для задачи визуализации множеств достижимости. Программа 38parrots – это веб-приложение, загружающее сцены визуализации с машины пользователя или по сети, включая сеть Интернет. Сцена описывается в текстовом формате CinemaScience [5] и интерпретируется следующим образом: для каждого параметра автоматически создается элемент управления типа “ползунок”, а для каждого артефакта определяется вид отображения (точки, отрезки, треугольники, сферы, vrmf-файлы и т.д.).

Пользователь, указывая значения параметров, тем самым определяет список данных для артефактов, что и формирует текущий визуальный образ.

Для решаемой в настоящей работе задачи визуализации описание сцены имеет следующий вид:

```
T, FILE_vrml_mnoj, FILE_treki_all, FILE_treki_currentT
1.00,  Symm-20.vrml, treki.csv, pts_1.00.treki.csv
1.05,  Symm-21.vrml, treki.csv, pts_1.05.treki.csv
1.10,  Symm-22.vrml, treki.csv, pts_1.10.treki.csv
...
```

В данной сцене определены один параметр T и три артефакта: $FILE_vrml_mnoj$, $FILE_treki_all$, $FILE_treki_currentT$. Для первого артефакта в его названии закодирован вид отображения vrmf, что означает загрузку и визуализацию данных в формате vrmf, который использован для хранения образа границы множества достижимости. Для второго и третьего артефактов вид отображения treki

представляет собой специальный формат визуализации траекторий. Пользователь выбирает в автоматически созданном графическом интерфейсе значение T , программа вычисляет соответствующие значения имен файлов артефактов и передает их видам отображения.

В результате графическое представление приобретает необходимый вид: поверхности, составляющие границу множества достижимости для выбранного момента времени; точки траекторий; точки, соответствующие текущему моменту.

Специально разработанный вид отображения `treki` требует на вход файл в формате `csv` с колонками X , Y , F_i и отображает каждую строчку этого файла в виде точки в сцене. Кроме того, он реагирует на колонку N (номер траектории); в графическом интерфейсе можно выбрать значение N и увидеть только точки соответствующей траектории. В дальнейшем можно расширить этот вид отображения, например, соединяя точки траекторий отрезками.

3. Используемый подход позволяет описывать разнообразные сцены. Применяемая семантика выбора значений параметров и загрузки соответствующих им файлов для видов отображения может быть задействована при решении широкого круга задач визуализации.

Дополнительно используется система фильтров – графических преобразователей, которые стыкуются в цепочку. Для задачи визуализации множества достижимости, особенно для удобства восприятия структуры границы множества, оказались полезными следующие фильтры: сечение полупространством, серия сечений, подкраска сечений/краев и другие.

Среди других преимуществ подхода – автоматическая возможность создания анимационных фильмов на основе параметров, заданных во входных файлах.

4. Особенный интерес представляет задача автоматического масштабирования. Дело в том, что множество достижимости растет слишком быстро с точки зрения восприятия человеческим глазом. Для компенсации этого предложен следующий метод: визуализировать не абсолютные значения координат множества достижимости, а масштабированные в зависимости от времени T . Таким образом, например, можно добиться того, чтобы визуальный образ множества увеличивался с ростом T , но не так быстро, как истинное множество. Это позволяет, с одной стороны, спокойно изучать его структуру, а с другой стороны, соответствует ожиданию, что множество должно “расти”.

Технически визуализация в настоящей работе построена из двух компонент: расчётная и визуализирующая. Расчётная производит вычисление и формирует файлы в описанном выше формате. Визуализирующая загружает их и изображает, обеспечивая интерактивное восприятие с помощью визуального канала, включая применение графических фильтров. По сути, расчётная и рисующая части – это участники единого конвейера визуализации, на входе которого находятся параметры расчётов, а на выходе – интерактивные образы на экране.

Для реализации метода перемасштабирования изначально использовалась расчётная часть. В настоящее время ведётся доработка программы визуализации, чтобы и она могла решать эту задачу.

5. Особенностью 38parrots является реализация графики на основе WebGL, что позволяет не только использовать возможности видеоускорителя для рендеринга, но и обеспечивает стыковку с технологиями виртуальной реальности WebVR. Мы наблюдали множества достижимости в виртуальной реальности, и, кроме положительных эффектов для восприятия, пришли к выводу, что работа в ней требует привлечения дополнительных методов, повышающих удобство навигации в графическом пространстве и удобство управления фильтрами.

Программа визуализации множеств достижимости доступна в среде Интернет по адресу <http://viewlang.ru/dubins/>. В докладе будут представлены результаты анимации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00410.

- [1] Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Трёхмерное множество достижимости нелинейной управляемой системы // Известия РАН. ТИСУ. 2003. № 3. С. 8–16.
- [2] Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 1.
- [3] Васёв П.А., Федотов А.А. Визуализация трёхмерного множества достижимости для машины Дубинса / Материалы Всероссийской конференции с международным участием “Теория управления и математическое моделирование”, посвященной памяти профессора Н.В.Азбелева и профессора Е.Л.Тонкова, Ижевск. 2020. С. 264–265.
- [4] URL: <https://38parrots.viewlang.ru>.

[5] *URL:* <https://cinemascience.org>.