

УДК 551.217

ТРЕХМЕРНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЛАВЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ГИДРОДИНАМИКИ СГЛАЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

© 2023 г. И. С. Стародубцев^{a, b}, Ю. В. Стародубцева^a, И. А. Цепелев^a, А. Т. Исмаил-Заде^{c, *}

^aИнститут математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990 Россия

^bУральский федеральный университет, ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002 Россия

^cТехнологический институт Карлсруэ, Институт прикладных наук о Земле,
ул. Аденауэрринг, 20б, Карлсруэ, 76131 Германия

*e-mail: alik.ismail-zadeh@kit.edu

Поступила в редакцию 27.07.2022 г.

После доработки 07.01.2023 г.

Принята к публикации 01.02.2023 г.

Лавовые потоки и лавовые купола являются основными проявлениями эффузивных вулканических извержений. Менее вязкая лава имеет тенденцию течь на большие расстояния в зависимости от рельефа склона, скорости извержения и вязкости извергаемой магмы. Когда магма имеет высокую вязкость, ее извержение на поверхность приводит к образованию лавовых куполов и их росту. Для численного моделирования лавовой динамики в данной работе предлагается использовать бессеточный метод гидродинамики сглаженных частиц. Приводится описание данного метода и численный алгоритм расчетов. Численный метод тестируется на простой модели “прорыва цилиндрической дамбы” с целью сравнения полученного профиля течения жидкости с аналитическим решением математической задачи. Метод применяется для изучения трех моделей течения лавы по вулканическому склону, когда вязкость лавы постоянная, зависит от времени и от объемной доли кристаллов в лаве. Результаты моделирования показывают характерные черты лавовых потоков, такие как образование лавового канала и трубки, и лавовых куполов, такие как образование панциря высокой вязкости по сравнению с менее вязким ядром купола. В заключении обсуждаются результаты моделирования и их зависимость от размера частиц в предложенном численном методе.

Ключевые слова: лавовый поток, лавовый купол, вязкость, морфология, численный анализ, научная визуализация

DOI: 10.31857/S0203030623700165, EDN: TSOHRH

1. ВВЕДЕНИЕ

Численное моделирование течений вязкой жидкости широко используется при изучении вулканических процессов. Течение магмы внутри вулканических кондуитов [Melnik, Sparks, 1999], течение лавы по склону вулкана [Tsepelev et al., 2016, 2019] и формирование лавовых куполов [Tsepelev et al., 2020, 2021; Starobubtseva et al., 2021; Zeinalova et al., 2021] являются некоторыми примерами этих процессов. Поток лавы начинает формироваться при эффузивных извержениях, когда (частично) расплавленная порода изливается из вулканического жерла на земную поверхность и распространяется по ней. Так возникают различные лавовые потоки, зависящие от химического состава и температуры магматических пород, объемной доли кристаллов и топографии

поверхности, по которой течет лава [Griffiths, 2000; Tsepelev et al., 2016].

Численное моделирование играет важную роль в понимании динамики, морфологии и тепловой эволюции лавовых потоков и куполов (напр., [Cordonnier et al., 2015] и ссылки в этой работе). Однако детальное изучение динамики лавового потока и роста купола является сложной задачей с точки зрения численного моделирования. Естественные неровности рельефа, застывание лавы и поверхностное трение, наличие плавающих твердых тел или других препятствий осложняют решение моделей лавовой динамики с помощью традиционных численных методов, таких как конечные объемы или конечные элементы (напр., [Ismail-Zadeh, Tackley, 2010]).

Хотя тепловые эффекты играют важную роль при течении лавовых потоков, упрощенные изо-

термические аналитические и численные модели продемонстрировали процессы течения лавы при отсутствии охлаждения (напр., [Huppert, 1982; Tsepelev et al., 2016]). Более реалистичный подход заключается в расчете переноса массы и энергии в вязком потоке с использованием топографии реальной поверхности. Моделирование лавовой динамики началось с аналитических решений для течений вязкой ньютоновской жидкости по горизонтальным или наклонным плоскостям [Huppert, 1982; Lister, 1992]. Упрощенные модели роста лавовых куполов предполагали вязкость лавы, независимую (напр., [Blake, 1990]) или зависящую (напр., [Stasiuk et al., 1993]) от температуры. Используя метод конечных элементов, были построены двумерные осесимметричные модели эволюции лавовых куполов и образования панциря, покрывающего лавовый купол [Hale, Wadge, 2003]. Численные исследования о влиянии реологии магмы на рост лавовых куполов проводились с использованием метода дискретных элементов в двумерной плоской геометрии [Husain et al., 2018, 2019; Harnett et al., 2018]. Двумерные и трехмерные численные модели лавовых потоков и роста куполов также изучались методом конечных объемов [Tsepelev et al., 2016, 2020, 2021; Statodubtseva et al., 2021] и бессеточным методом гидродинамики сглаженных частиц (МГСЧ) [Héroult et al., 2011; Zago et al., 2018].

В данной работе представлены исследования по разработке и реализации трехмерной численной модели течения лавового потока и роста куполов с помощью МГСЧ. В разделе 2 описывается математическая модель течения жидкости и представлен численный подход к решению этой модели. В разделе 3 представлены результаты тестирования модели с использованием аналитического решения, полученного для модели течения тонкого слоя вязкой жидкости [Huppert, 1982] и в разделе 4 несколько модельных случаев динамики лав с различной вязкостью и топографией вулканов. В заключении обсуждаются результаты численного исследования.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для описания процесса лавовых потоков или роста куполов рассматривается задача численного моделирования растекания вязкой неоднородной несжимаемой жидкости под действием гравитационных сил по заданной поверхности в некоторой области моделирования $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, где \mathbb{R}^3 – трехмерное вещественное векторное пространство. Математическая модель, описывающая такое движение, задается уравнением Навье–Стокса и уравнением неразрывности [Chandrasekhar, 1961; Tsepelev et al., 2020]:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \operatorname{div}(\mu(\operatorname{grad} \mathbf{u} + (\operatorname{grad} \mathbf{u})^T)) = -\operatorname{grad} p + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\frac{Dp}{Dt} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

где $\mathbf{x}(t) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ – пространственная переменная, t – время, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ – вектор скорости, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ – вектор ускорения свободного падения, $g = 9.81 \text{ м с}^{-2}$, p – давление, ρ – плотность, μ – вязкость; $\frac{D \cdot}{Dt} = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + \mathbf{u} \operatorname{grad} \cdot$ – полная производная по времени; grad и div – градиент и дивергенция соответственно; T – операция транспонирования. Данные уравнения будут дополнены соответствующими начальными и граничными условиями, описанными ниже.

2.1. Метод гидродинамики сглаженных частиц (МГСЧ)

МГСЧ был впервые предложен для решения астрономических задач в трехмерном пространстве, где движение астрономических тел напоминает движение жидкости, и поэтому метод основан на уравнениях гидродинамики [Gingold, Monagan, 1977; Lucy, 1977]. Кратко приведем основные характеристики и преимущества МГСЧ [Liu, Liu, 2003; Zago et al., 2018]. МГСЧ работает путем разделения моделируемой жидкости на дискретные элементы, называемые частицами, и физические параметры моделируемой среды приписываются этим частицам. Эти частицы имеют пространственное расстояние, на котором они оказывают влияние на другие частицы. Интуитивно, это можно представить следующим образом: на поведение частицы оказывают наибольшее влияние ближайшие (соседние) частицы; с увеличением расстояния влияние других частиц постепенно ослабевает; в какой-то момент влияние удаленных частиц становится пренебрежительно мало и его можно положить равным нулю.

Если известна скорость частицы, то все физические параметры этой частицы переносятся вместе с самой частицей по направлению вектора скорости, изменяясь в зависимости от физических параметров соседних частиц. МГСЧ естественным образом моделирует разрыв в сплошной среде и поэтому приспособлен для изучения хрупкого разрушения и последующего течения в поврежденных твердых телах [Benz et al., 1995]. Вычислительное преимущество данного метода состоит в том, что вычисления производятся только там, где находится вещество (при этом сокращается объем хранения и вычислений). Метод обладает преимуществом распараллеливаемости, что вполне подходит для реализации на массивно-параллельном оборудовании [Héroult et al., 2011].

Для разделения моделируемой жидкости на дискретные элементы рассмотрим некоторую непрерывную пространственную функцию с компактным носителем $F(\mathbf{x})$. Несложно показать, что свертка такой функции с δ -функцией (функцией Дирака [Gel'fand, Shilov, 1964]) $F(\mathbf{x}) = (F\delta)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{x}')\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}'$ дает в точности функцию $F(\mathbf{x})$, где $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \infty$ при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$, $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'$ и $\int_{\mathbb{R}^3} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')d\mathbf{x}' = 1$.

Для того чтобы перейти к численным методам, прежде всего нужно перейти от δ -функции к ее непрерывному приближению. Рассмотрим функцию $W: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами: $\int_{\mathbb{R}^3} W(\mathbf{x}', r)d\mathbf{x}' = 1$; $\lim_{r \rightarrow 0} W(\mathbf{x}, r) = \delta(\mathbf{x})$; $W(\mathbf{x}, r) \geq 0$; $W(\mathbf{x}, r) = W(-\mathbf{x}, r)$; и $W(\mathbf{x}, r) = 0$ при $\|\mathbf{x}\| \geq r$ для всех значений $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и $r \in \mathbb{R}^+$. Здесь $\|\mathbf{x}\| = [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2}$, \mathbb{R} – вещественное пространство, $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R}: r > 0\}$ и r – радиус компактного носителя функции. Тогда функцию $F(\mathbf{x})$ можно аппроксимировать так

$$F(\mathbf{x}) = (F\delta)(\mathbf{x}) \approx (FW)(\mathbf{x}) = \int F(\mathbf{x}')W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', r)d\mathbf{x}'. \quad (3)$$

Функцию $W(\mathbf{x}, r)$ называют ядром сглаживания в МГСЧ. Также имеет смысл потребовать от этой функции быть достаточно гладкой для того, чтобы возможно было проводить дискретизацию дифференциальных уравнений второго порядка. В этой работе в качестве ядра сглаживания используется кубический сплайн [Monaghan, 1992]

$$W(\mathbf{x}, r) = \frac{8}{\pi r^3} \begin{cases} 6(q^3 - q^2) + 1, & 0 \leq q \leq 0.5 \\ 2(1 - q)^3, & 0.5 \leq q \leq 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (4)$$

где $q = \|\mathbf{x}\|/r$. Для аппроксимации градиента и лапласиана в \mathbb{R}^3 будут использованы следующие формулы [Brookshaw, 1985]:

$$\begin{aligned} \text{grad} F_i &\approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (F_j - F_i) \text{grad}_i W_{ij}, \\ \text{div} \mathbf{u}_i &\approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \text{grad}_i W_{ij}, \\ \text{div}(\text{grad} F_i) &\approx 10 \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \frac{(F_i - F_j)}{\|\mathbf{x}_{ij}\|^2} \mathbf{x}_{ij} \cdot \text{grad}_i W_{ij}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $F_i = (FW)(\mathbf{x}_i) \approx \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} F_j W_{ij}$; индексы j такие, что $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| < r$; $F_i \approx F(\mathbf{x}_i)$; $W_{ij} = W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, r)$; m_j и ρ_j – масса и плотность j -й частицы соответственно

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{ij} &= \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j \text{ и} \\ \text{grad}_i W_{ij} &= \\ &= \left(\frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, r)}{\partial x_1}, \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, r)}{\partial x_2}, \frac{\partial W(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j, r)}{\partial x_3} \right). \end{aligned}$$

2.2. Алгоритм численного решения

Для реализации численного решения задачи жидкость представляется в виде дискретного набора частиц. Каждая частица представляет собой сферу диаметра d . На каждом временном шаге t рассмотрим положение $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i(t)$, скорость $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t)$, плотность $\rho_i = \rho_i(t)$, массу $m_i = m_i(t)$ и вязкость $\mu_i = \mu_i(t)$ i -й частицы и шаг по времени Δt . Последовательно для каждой i -й частицы выполняются следующие шаги.

1. Вычисляется промежуточное положение i -й частицы: $\mathbf{x}_i^* = \mathbf{x}_i + \Delta t \mathbf{u}_i$.

2. Для точки \mathbf{x}_i , находим все точки $\{\mathbf{x}_j\}$ такие, что $\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| < r$. Время выполнения данной процедуры можно оценить величиной $N \log(N)$, где N – количество частиц в расчете.

3. Вычисляется промежуточная скорость, которая учитывает влияние гравитационных сил: $\mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i + \Delta t \mathbf{g}$.

4. Вычисляется давление бездивергентным методом DFSPH [Bender, Koschier, 2015, 2017; Ihmsen et al., 2014a, 2014b]:

$$p_i = \frac{\rho_i^* - \rho}{\Delta t^2} \frac{\rho_i^2}{\left\| \sum_j m_j \text{grad} W_{ij} \right\|^2 + \sum_j \|m_j \text{grad} W_{ij}\|^2}, \quad (6)$$

где $\rho_i^* = \rho_i \left(1 + \Delta t \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (\mathbf{u}_i^* - \mathbf{u}_j^*) \cdot \text{grad}_i W_{ij} \right)$.

5. Корректируются значения скорости с учетом силы давления и вязкой силы

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^{**} &= \mathbf{u}_i^* - \Delta t \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2} \right) \text{grad} W_{ij} + \\ &+ \frac{1}{\rho_i} \Delta t \text{div} \left(\mu_i \left(\text{grad} \mathbf{u}_i^{**} + \text{grad}^T \mathbf{u}_i^{**} \right) \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Для нахождения скорости \mathbf{u}_i^{**} составляется система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \left[1 - 5\Delta t \sum_j \frac{(m_i + m_j)(\mu_i + \mu_j) \mathbf{grad} W_{ij}(\mathbf{x}_{ij})^T}{2\rho_i\rho_j \|\mathbf{x}_{ij}\|^2 + 0.01r^2} \right] \mathbf{u}_i^{**} + \\ & + 5\Delta t \sum_j \left[\frac{(m_i + m_j)(\mu_i + \mu_j) \mathbf{grad} W_{ij}(\mathbf{x}_{ij})^T}{2\rho_i\rho_j \|\mathbf{x}_{ij}\|^2 + 0.01r^2} \right] \mathbf{u}_j^{**} = (8) \\ & = \mathbf{u}_i^* - \Delta t \sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i} + \frac{p_j}{\rho_j} \right) \mathbf{grad} W_{ij}, \end{aligned}$$

в результате решения которой обновляется скорость и положение частицы i как

$$\mathbf{u}_i(t + \Delta t) = \mathbf{u}_i^{**}, \quad \mathbf{x}_i(t + \Delta t) = \mathbf{x}_i + \Delta t \mathbf{u}_i^{**}, \quad (9)$$

где шаг по времени выбирается с учетом условия Куранта–Фридрихса–Леви $\Delta t \leq 0.1h(\max_i \|\mathbf{u}_i\|)^{-1}$ [Monaghan, 1992]. Шаги 1–5 выполняются для всех точек \mathbf{x}_i .

Согласно граничным условиям, производится добавление частиц с заданными физическими параметрами. Условие прилипания на границе моделируются вязким трением [Weiler et al., 2018]. Это подразумевает, что скорости частиц на границе вычисляются по формуле (8) с высокой вязкостью.

Программные коды для компьютерного моделирования разработаны на основе пакета SPlisHSPlasH (<https://splishsplash.readthedocs.io/en/2.9.0/about.html>), который представляет собой библиотеку с открытым исходным кодом для языка C++. Для моделирования динамики лавы был написан дополнительный код для переменной вязкости, оптимизирован решатель для расчета давлений и добавлены коды для расчета кинетики роста кристаллов. Расчеты производились на одном узле кластера “Уран” под управлением OS Linux (CPU – Intel Quad-Core Xeon 36 ядер в каждом, 3.10 ГГц, ОЗУ 64 ГБ). Распараллеливание на основе OpenMP использует 34 ядра. Данная версия кодов не использует GPU.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ТЕСТОВЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для оценки применимости МГСЧ был проведен численный тестовый эксперимент по решению задачи о “прорыве цилиндрической дамбы” с целью сравнения полученного профиля течения жидкости с аналитическим решением задачи о течении жидкости по горизонтальной поверхности. Модель течения при “прорыве цилиндрической дамбы” описывает переходную эволюцию профиля фиксированного объема жидкости с вязкостью μ , первоначально заключенного в цилиндр, который внезапно удаляется, подобно “прорыву дамбы”. Существует аналитическое решение данной задачи в случае тонкого слоя жидкости [Nur-

pert, 1982]. Рассматривая осесимметричный случай, уравнение для профиля растекания представляется как:

$$H(R, t) = \xi_N^{2/3} \left(\frac{3Q\mu}{\rho g t} \right)^{1/4} \Psi(\xi/\xi_N), \quad (10)$$

здесь H – высота растекания жидкости; R – радиус растекания; $\xi(R, t) = R \left(\frac{\rho g Q^3 t}{3\mu} \right)^{-1/8}$, $\xi_N = \left(\frac{1024}{81\pi^3} \right)^{1/8} \approx 0.894$ – значение ξ в $R = R_N(t)$; $R_N(t) = \xi_N \left(\frac{\rho g Q^3 t}{3\mu} \right)^{1/8}$ – положение фронта растекания;

$Q = 2\pi \int_0^{R_N(t)} R H(R, t) dr$ – объем жидкости и $\Psi(z) = \left(\frac{3}{16} (1 - z^2) \right)^{1/3}$. Заметим, что эти формулы выведены в приближение тонкого слоя, то есть, когда толщина растекающейся жидкости намного меньше радиуса ее горизонтального простирания.

На рис. 1 показано растекание жидкости под действием гравитационных и вязких сил после “прорыва цилиндрической дамбы”. Первоначальная высота и диаметр “дамбы” равны 1 м. В данном эксперименте приняты следующие значения модельных параметров: вязкость $\mu = 10^3$ Па с, плотность $\rho = 2600$ кг м⁻³ и диаметр частиц (в МГТС) – 0.025 м. Условие прилипания аппроксимировалось условием вязкого трения с непростеканием, при котором скорость частиц на границе растекания жидкости подбиралась так, чтобы численное решение наилучшим образом аппроксимировало аналитическое решение (10). В данном случае наилучшая аппроксимация достигается для скорости частиц, вычисляемой по формуле (8) с вязкостью 10^{12} Па с. Эта вязкость использовалась для условия вязкого трения при дальнейшем моделировании.

Для сравнения с аналитическим решением (10) был выбран момент времени $t = 2.915$ (см. рис. 1д). Такой момент выбран произвольным образом с учетом следующих соображений. Жидкость растекается уже в течение достаточного времени, чтобы артефакт в виде верхней границы изначального цилиндра жидкости “исчез”. При этом растекание не должно продолжаться достаточно долго с тем, чтобы толщина слоя не приблизилась к размерам частицы.

4. ТЕЧЕНИЕ ЛАВЫ ПО СКЛОНУ ВУЛКАНОВ

Морфология лавовых потоков существенно зависит от вязкости лавы и топографии склона вулкана. В данной работе рассмотрены три различные вязкости лавы: постоянная вязкость

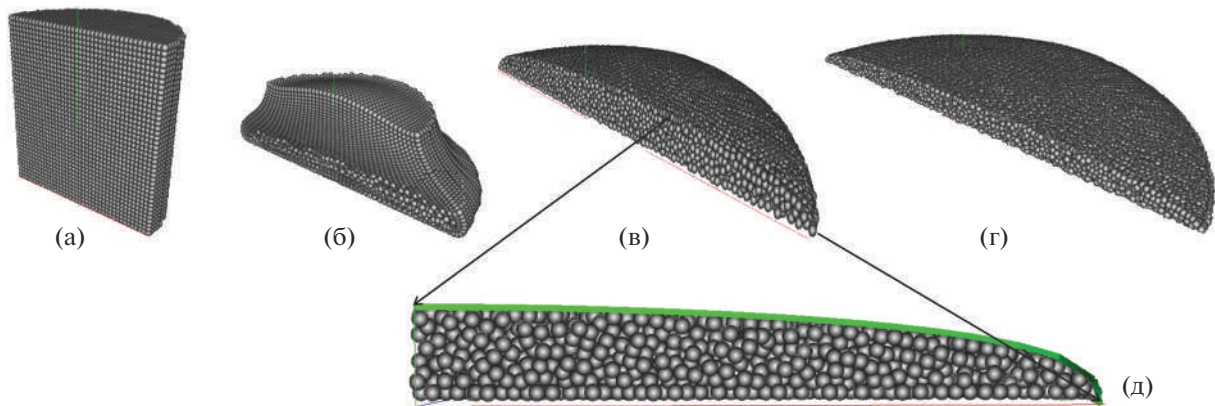


Рис. 1. Растекание жидкости в моменты безразмерного времени: $t = 0.03$ (а); $t = 0.515$ (б); $t = 2.915$ (в); $t = 3.954$ (г). Серые сферы – частицы МГСЧ. Вертикальный профиль в момент $t = 2.915$, где зеленая кривая представляет аналитическое решение (д).

(секц. 4.1), вязкость, зависящая от времени (секц. 4.2), и вязкость, зависящая от объемной доли кристаллов (секц. 4.3).

4.1. Модель 1: потоки лавы с постоянной вязкостью

В качестве поверхности растекания используем топографию $G: (x_1, x_2) \rightarrow f(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in [0, 8000 \text{ м}] \times [0, 8000 \text{ м}]$, которая представляет собой склон вулкана (рис. 2), сгенерированный с помощью генератора реалистичных ландшафтов Word Mashine [https://www.world-machine.com]. На этой поверхности сформировано вулканическое жерло кольцевой формы с радиусом 15 м, на котором задается условие $\mathbf{u} = (u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = u_c)$. На остальной части поверхности G задается условие вязкого трения. Из жерла на поверхность G извергается лава с расходом $\sim 71 \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$. В моделях 1 и 2 расход определяется как произведение магнитуды скорости $u_c = 0.1 \text{ м с}^{-1}$ на площадь поверхности жерла. В моделях 1 и 2 плотность равна 2600 кг м^{-3} и диаметр частиц (в МГСЧ) – 0.5 м. Заметим, что время расчетов увеличивается с уменьшением шага по времени. Для шага по времени Δt , не превышающего 0.01 с, расчетное время численного решения в модели 1 (течение лавового потока за 2000 с) не превышает 10 ч на одном узле (18-и ядерный процессор Intel(R) Xeon(R) Gold 6254 CPU @ 3.10GHz).

На рис. 3 представлены смоделированные лавовые потоки для трех различных вязкостей лавы: 10^3 Па с (характерна для базальтовых лав), 10^5 Па с и 10^7 Па с (характерна для андезитовых лав). Лава течет по наиболее крутому склону модельной поверхности. Течение жидкости замедляется с увеличением вязкости (см. рис. 3б), лава растекается медленнее и по меньшей поверхности, увеличиваясь при этом в толщине. В случае вязкости 10^7 Па с , лава

создает купол до того, как распространяться латерально (см. рис. 3в).

4.2. Модель 2: лавовые потоки с вязкостью, зависящей от времени

Рассматривается та же топография G (см. рис. 2) и то же вулканическое жерло, из которого извергается лава с таким же расходом, как в случае модели 1. Введем линейную зависимость вязкости лавы от времени: $\mu(t) = \mu_* + \alpha t$, где μ_* – вязкость магматического расплава и α – постоянная. Хотя линейная зависимость вязкости от времени не отражает физические процессы изменения вязкости лавы, она описывает увеличение вязкости лавы со временем достаточно реалистично.

На рис. 4 показаны лавовые потоки для нескольких моментов времени при $\mu_* = 10^4 \text{ Па с}$ и $\alpha = 100 \text{ Па}$. В соответствии с рельефом топографии в начальные моменты лава разделяется на два основных потока, один из которых (левый на рисунке) течет быстрее другого вдоль быстрейшего спуска по склону вулкана. Со временем вязкость лавы увеличивается на границах потоков, так как “продолжительность жизни” частиц вдоль границ выше таковой внутри потока из-за условий вязкого трения. Основные лавовые потоки разветвляются на более мелкие (тонкоструйные) потоки (см. рис. 4с). В результате изменения рельефа с крутого на более пологий, лавовый поток утолщается и при дальнейшем изменении рельефа, поток вновь разветвляется (см. рис. 4в, 4г). Через 8000 с (~ 2.2 ч) правый поток образует канал (см. рис. 4д), в то же время левый разветвленный лавовый поток начинает образовывать лавовую трубку (см. рис. 4е).

Рисунок 5 представляет результаты модели 2 при $\mu_* = 10^5 \text{ Па с}$ для одного и того же времени

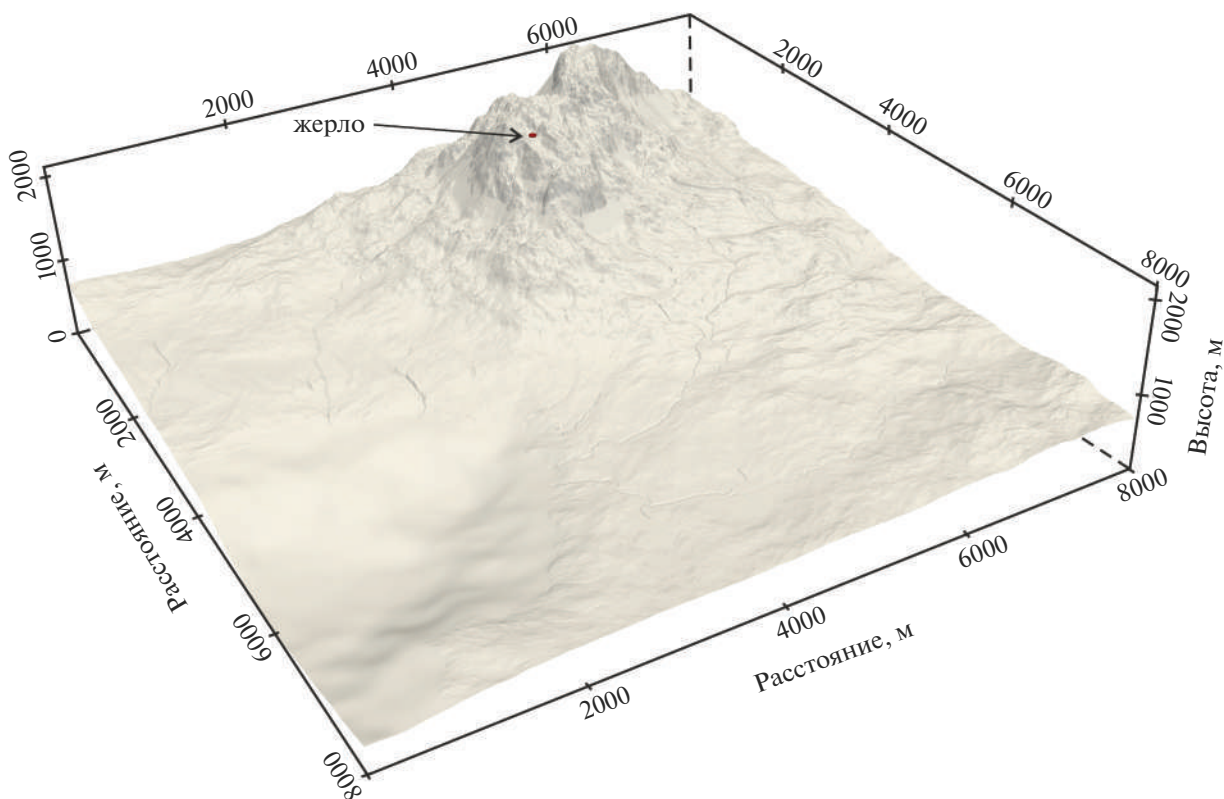


Рис. 2. Топография в моделях 1 и 2. Красный круг показывает расположение жерла вулкана.

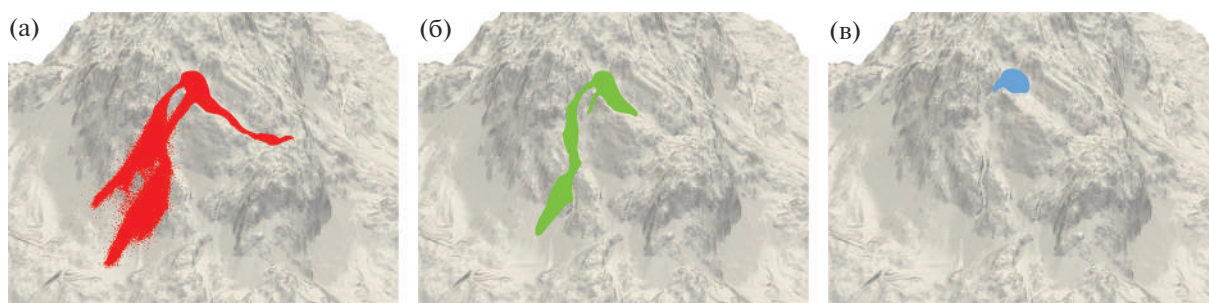


Рис. 3. Лавовые потоки в модели 1 на момент времени 2000 с при вязкости лавы 10^3 Па с (а), 10^5 Па с (б) и 10^7 Па с (в).

(2000 с) и трех различных значений параметра α , увеличение которого приводит к более быстрому возрастанию вязкости лавы со временем. При малых значениях параметра α , низкая вязкость лавы приводит к более быстрому ее продвижению; при этом лавовый канал образуется во всех трех случаях из-за граничных условий.

4.3. Модель 3: лавовые потоки с вязкостью, зависящей от объемной доли кристаллов

Топография в модели 3 (рис. 6) была сгенерирована таким образом, чтобы аппроксимировать

вулканы гавайского типа с участками крутых и пологих спусков и с учетом эрозии. Диаметр жерла составляет 5.5 м. В модели 3 расход лавы равен $\sim 4.75 \times 10^{-3} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$ ($u_c = 2 \times 10^{-4} \text{ м с}^{-1}$), плотность — 2600 кг м^{-3} и диаметр частиц (в МГТС) — 0.25 м. В данной модели лавовая вязкость зависит от объемной доли кристаллов [Costa et al., 2009; Tsepelev et al., 2021]:

$$\mu(\varphi) = \mu_* (1 + \varphi^\delta) \times \left[1 - (1 - \xi) \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2(1 - \xi)} \varphi(1 + \varphi^\gamma) \right) \right]^{-B\varphi_*}, \quad (11)$$

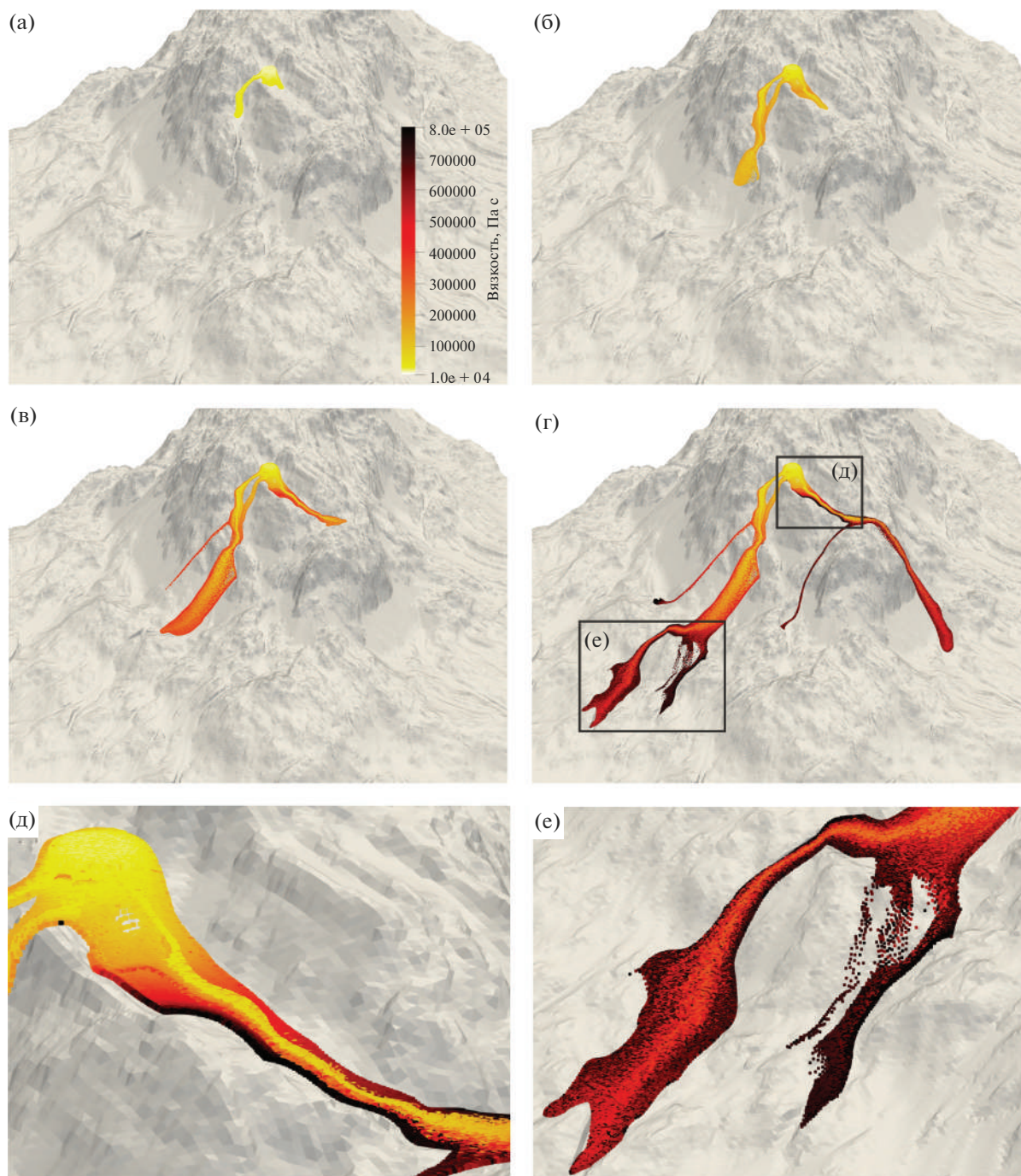


Рис. 4. Формирование потока лавы в модели 2 при $\mu_* = 10^4$ Па с и $\alpha = 100$ Па в моменты времени 500 (а), 2000 (б), 4000 (в) и 8000 с (г). На панелях (д) и (е) рисунка, выделенных на панели (г), показаны части лавового потока, обсуждаемые в тексте.

где μ_* — вязкость магматического расплава; $\varphi = \phi/\phi_*$, ϕ — объемная доля кристаллов; ϕ_* ($=0.384$) — удельная объемная доля кристаллов, представляющая критическую долю твердой фракции при начале экспоненциального увеличения вязкости лавы; эмпирические параметры

$\delta = 7.24$, $\gamma = 5.76$ и $\xi = 4.63 \times 10^{-4}$ взяты из работ [Lejeune, Richet, 1995; Costa et al., 2009]; $\text{erf}(\cdot)$ — функция ошибки, где аргумент функции ошибки содержит член, линейный по ϕ , и нелинейный член, допускающий быстрое насыщение при больших значениях объемной доли кристаллов

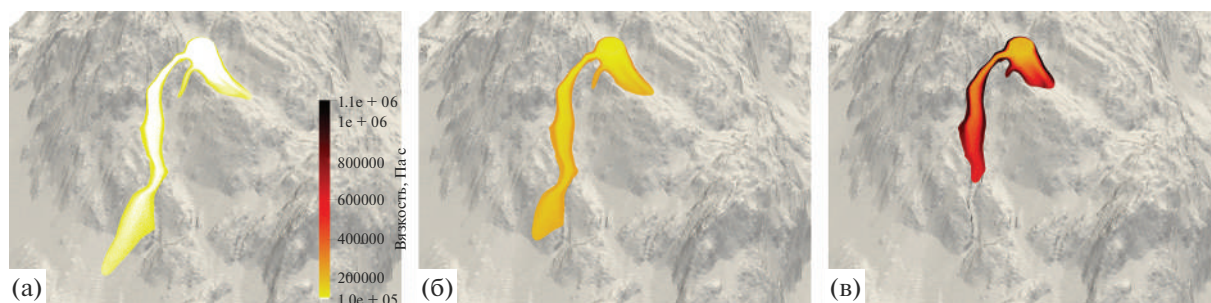


Рис. 5. Формирование лавового потока в модели 2 при $\mu_* = 10^5$ Па·с и на момент времени 2000 с для различных значений $\alpha = 10$ (а), $\alpha = 100$ (б) и $\alpha = 500$ Па (в).

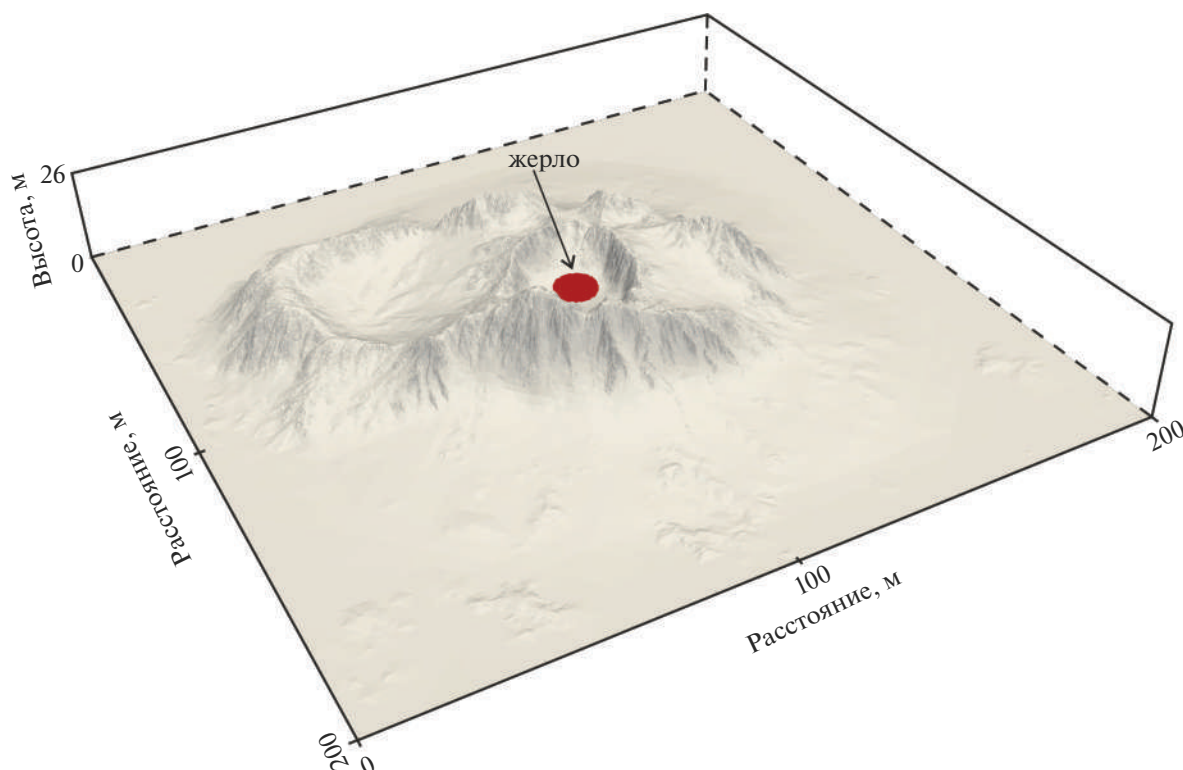


Рис. 6. Топография в модели 3. Красный круг показывает расположение жерла вулкана.

[Costa, 2005]. Теоретическое значение коэффициента Эйнштейна B определяется из уравнения Эйнштейна как $B = (\mu(\phi) - 1)/\phi$ [Mardles, 1940]; экспериментально установлено, что при $\phi \rightarrow 0$ коэффициент Эйнштейна изменяется от 1.5 до 5 [Jeffrey, Acrivos, 1976].

Объемная доля кристаллов ϕ определяется из эволюционного уравнения, описывающего упрощенную кинетику роста содержания кристаллов при кристаллизации, вызванной дегазацией (напр., [Tserlev et al., 2020]):

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\frac{\phi - \phi_{eq}}{\tau}. \quad (12)$$

Все частицы в начальный момент времени имеют объемную долю кристаллов ϕ_0 ; ϕ_{eq} – объемная доля кристаллов при равновесии, которая зависит от доли воды, растворенной в магме, и температуры; τ – характерное время роста содержания кристаллов (Crystal Content Growth Time – CCGT), необходимое кристаллам для достижения ϕ_{eq} . В данной модели τ равно 3 дням, $B = 2.5$, $\phi_0 = 0.6$, $\phi_{eq} = 0.83$. Чем меньше CCGT, тем быстрее процесс кристаллизации сходится к равновесному состоянию. CCGT называют также временем релаксации, которое требуется для уменьшения разницы между фактическим (ϕ) и равновесным

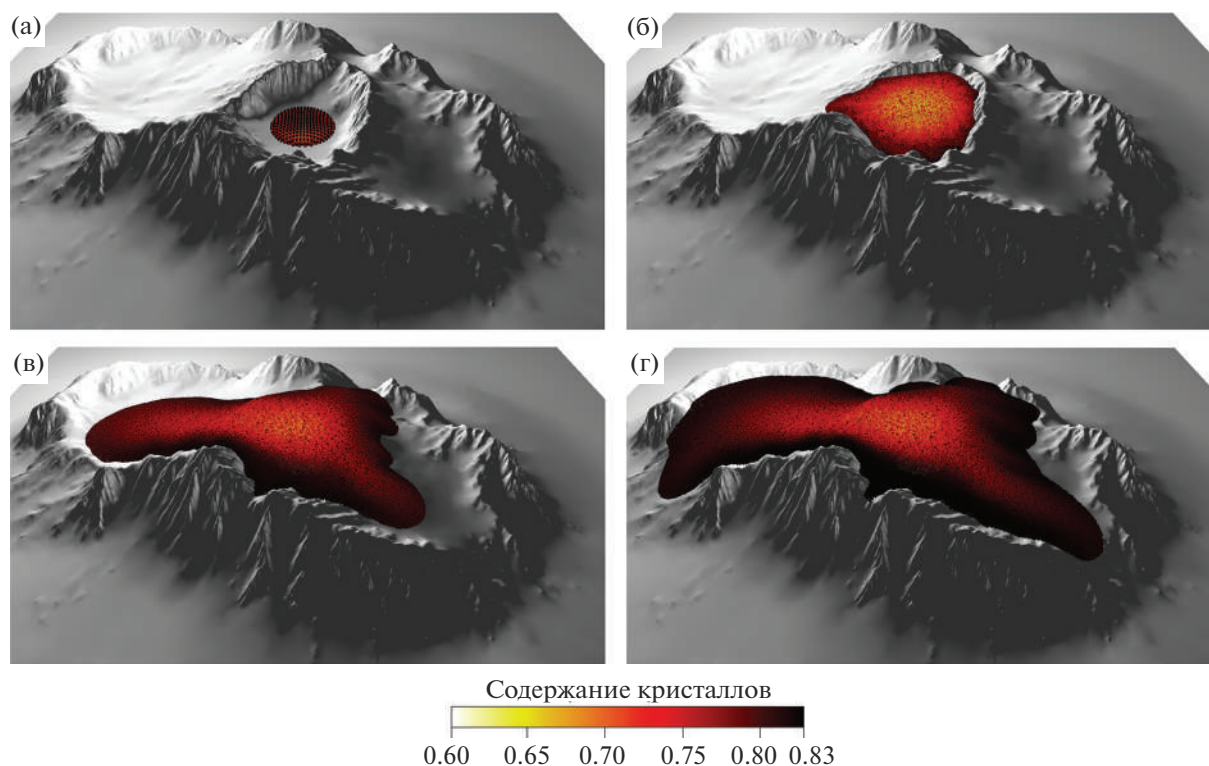


Рис. 7. Морфология лавового потока в моменты времени 1 ч (а), 8 (б), 25 (в) и 36 (г) ч. Цветом показана объемная доля кристаллов в лаве (crystal content). Визуализация рис. 7 и 8 осуществлена с помощью графического пакета, созданного в ИММ УрО РАН [Vasev et al., 2021].

(ϕ_{eq}) значениями объемных долей кристаллов в e (~ 2.71828) раз по отношению к начальной разнице ($\phi_{in} - \phi_{eq}$), где $\phi_{in} = 0.6$ — объемная доля кристаллов на поверхности кратера [Tsepelev et al., 2020]. Таким образом, уравнения (11) и (12) определяют вязкость лавы в зависимости от объемной доли кристаллов.

На рис. 7 представлена модель эволюции лавового потока в последовательные моменты времени в случае, когда вязкость магматического расплава равна 10^3 Па с. Отчетливо видно формирование канала повышенной вязкости (темные шарики), вдоль которого течет лава (желто-красные шарики). Сначала лава заполняет внутренний кратер, затем перетекает в соседние кратеры, и после этого начинает изливаться по склону вулкана.

Результаты лавовой динамики в модели 3 при различных значениях вязкости магматического расплава μ_* представлены на рис. 8. При малой вязкости $\mu_* = 10^2$ Па с лава образует потоки (см. рис. 8а, 8б), и при ее увеличении лавовые купола (см. рис. 8в, 8г). Для анализа структуры вязкости лавы, на рис. 8 представлены “нарезанные” вертикальные слои лавовых структур.

Для этого разработано веб-приложение с открытым исходным кодом, реализующее визуализацию результатов численных расчетов задач высокой размерности [Vasev et al., 2021] на основе интерактивного подхода к визуализации, при котором получение новых результатов численного моделирования автоматически обновляет состояние визуализации [Ahrens et al., 2014]. Визуализация проводится онлайн, при которой нет необходимости перемещения результатов расчетов с вычислительного узла на конечное устройство для их визуализации. Разработанное веб-приложение позволяет создать многопараметрическую визуализацию, когда в одной сцене можно показывать результаты расчетов для различных условий, например, для одного расчетного значения времени и различных начальных условий [Starodubtsev et al., 2022; Vasev et al., 2022]. На рис. 8 видно формирование лавовой трубки (см. рис. 8д) высокой вязкости, под которой течет лавовый поток пониженной вязкости. Также видна структура лавового купола (см. рис. 8е) с толстым панцирем (черный слой на поверхности купола), который образуется при излиянии высоковязкой лавы.

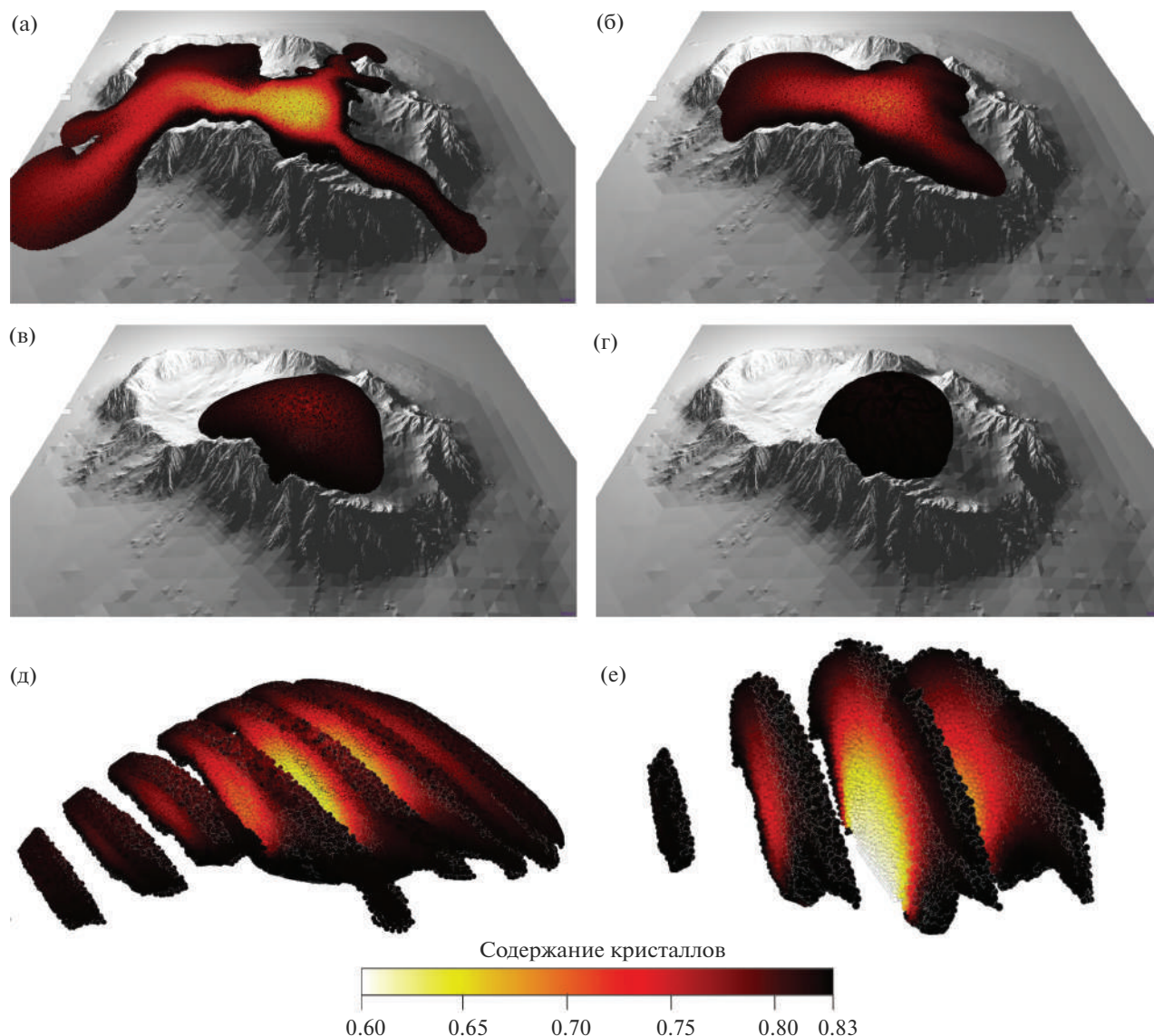


Рис. 8. Морфология лавовых потоков для различных значений вязкости магматического расплава μ : 10^2 Па с (а), 10^3 Па с (б), 10^4 Па с (в) и 10^5 Па с (г) через 32 ч после начала экструзии. Панели (д) и (е) представляют “нарезанные” лавовые структуры (в и г) соответственно. Цветом показана объемная доля кристаллов в лаве.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

В данной работе представлен метод гидродинамики сглаженных частиц для расчета трехмерных численных моделей динамики лав. Метод тестировался на примере растекания жидкости под действием гравитационных и вязких сил после “прорыва цилиндрической дамбы”, и результаты расчета сравнивались с аналитическим решением задачи течения вязкой жидкости на горизонтальной поверхности. Проведены расчеты на двух сгенерированных поверхностях вулканического типа. На одной поверхности рассмотрены два случая течения лавы из жерла, находящегося на склоне вулкана: с постоянной и зависящей от

времени вязкостями. На другой поверхности жерло располагается в кратере вулкана; при этом вязкость лавы зависела от объемной доли кристаллов в лаве. Показаны различные морфологические формы лавовых потоков и куполов. Также показано формирование лавового канала, лавовой трубки и лавового купола с панцирем повышенной вязкости.

Размер частиц в МГСЧ влияет на время численных расчетов — чем меньше частица, тем больше количество частиц и, следовательно, большее количество расчетов необходимо выполнить. По мере увеличения количества частиц время расчетов возрастает нелинейно. В то же время чем

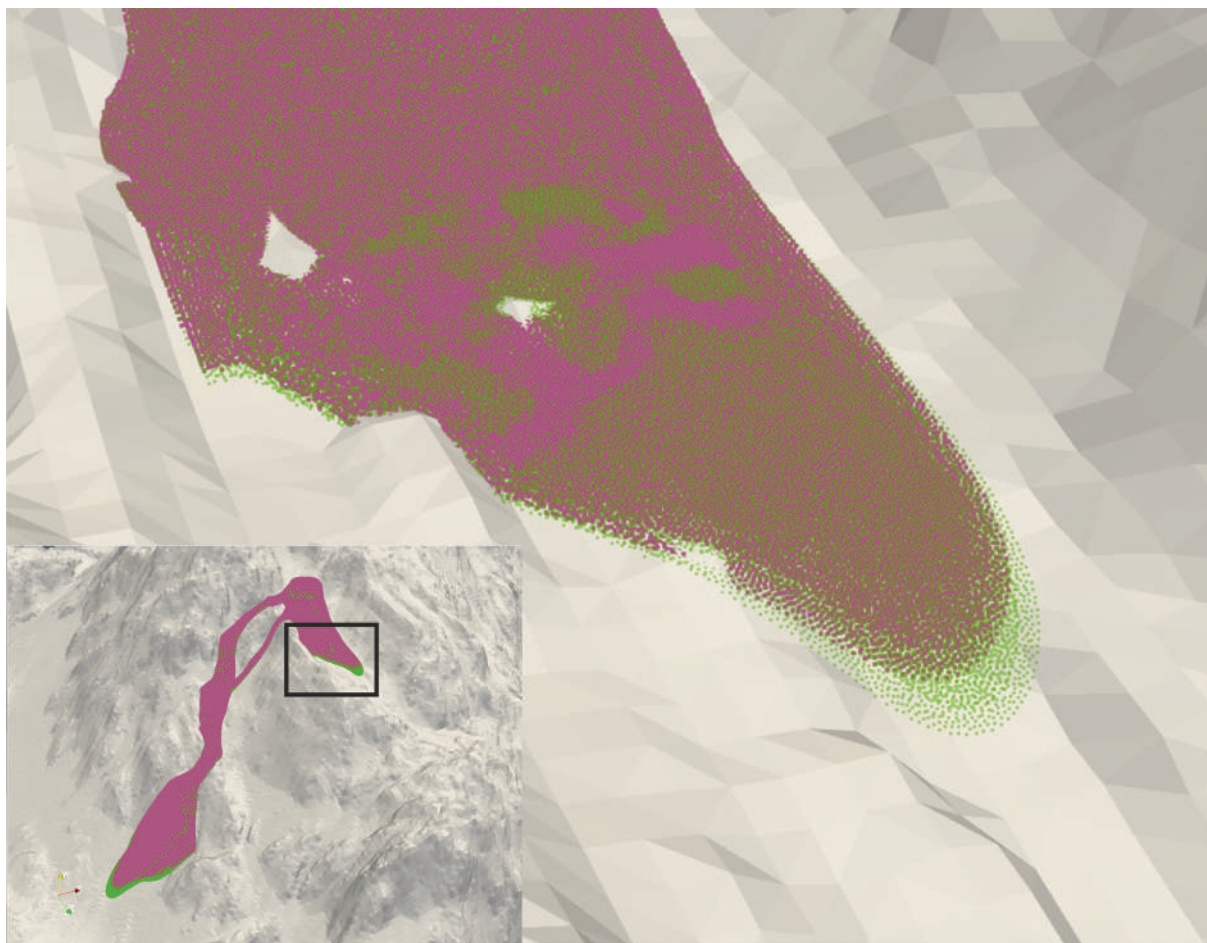


Рис. 9. Сравнение численных расчетов для модели 1 в случае двух размеров частиц — 0.5 м (зеленые частицы) и 1 м (розовые частицы). На вставке черной линией указана область лавового потока, увеличенная на основном рисунке для лучшей визуализации результатов.

больше размер частиц, тем менее точными будут результаты расчета. Были проведены два эксперимента в модели 1 с различными размерами частиц. При диаметре частиц $d = 0.5$ м, максимальное количество частиц в расчете было приблизительно 10^6 и время расчета составило 12.5 часов на 18-ядерном вычислительном узле, описанном выше. При диаметре частиц $d = 1$ м, максимальное количество частиц в расчете было $\sim 3 \times 10^5$ и время расчета не превысило 7 часов. Заметим, что при толщине потока меньшего диаметра частицы, метод может некорректно моделировать течение потока. Например, на рис. 9 видно, что большие частицы (розовые) хуже приближают поток близкий к диаметру частицы (1 м), по сравнению с частицами меньшего размера (зеленые, 0.5 м).

Хотя результаты численных экспериментов получены с использованием синтетических поверхностей вулканов, они максимально приближены к реальным данным. Поэтому не представляет сложностей использование МГСЧ в моделях

с реальной топографией вулканов, напр., полученных с помощью спутникового сканирования. Таким образом, метод гидродинамики сглаженных частиц представляет альтернативу сеточным методам.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы выражают благодарность А.И. Короткому, О.Э. Мельнику и И.С. Уткину за обсуждение работы.

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Исследование выполнено при совместной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Немецкого научного фонда (гранты РФФИ № 20-51-12002 и DFG IZ203/14-1). Численные эксперименты проводились с использованием суперкомпьютера URAN в Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, г. Екатеринбург.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ahrens J., Jourdain S., O'Leary P., Patchett J., Rogers D.H., Petersen M.* An image-based approach to extreme scale in situ visualization and analysis // SC '14: Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis. 2014. P. 424–434. <https://doi.org/10.1109/SC.2014.40>
- Bender J., Koschier D.* Divergence-free smoothed particle hydrodynamics // Proceedings of the 14th ACM SIGGRAPH Eurographics Symposium on Computer Animation, SCA '15, New York, NY, USA, Association for Computing Machinery. 2015. P. 147–155.
- Bender J., Koschier D.* Divergence-free SPH for incompressible and viscous fluids // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2017. V. 23. № 3. P. 1193–1206.
- Benz W., Asphaug E.* Simulations of brittle solids using smoothed particle hydrodynamics // Comput. Phys. Commun. 1995. V. 87. P. 253–265.
- Blake S.* Viscoplastic models of lava domes / Ed. J.H. Fink // Lava Flows and Domes; Emplacement Mechanisms and Hazard Implications. N.Y.: Springer, 1990. P. 88–126.
- Brookshaw L.* A method of calculating radiative heat diffusion in particle simulations // Publications of the Astronomical Society of Australia. 1985. V. 6. № 2. P. 207–210.
- Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Oxford University Press, 1961. 652 p.
- Cordonnier B., Lev E., Garel F.* Benchmarking lava-flow models / Eds A.J.L. Harris, T. De Groeve, F. Garel, S.A. Carn // Detecting, Modelling and Responding to Effusive Eruptions. Geological Society, London, Special Publications 426. 2015. P. 425. <https://doi.org/10.1144/SP426.7>
- Costa A.* Viscosity of high crystal content melts: Dependence on solid fraction // Geophys. Res. Lett. 2005. V. 32. P. L22308. <https://doi.org/10.1029/2005GL0243033>
- Costa A., Caricchi L., Bagdassarov N.* A model for the rheology of particle-bearing suspensions and partially molten rocks // Geochem. Geophys. Geosys. 2009. V. 10. № 3. P. Q03010.
- Gel'fand I.M., Shilov G.E.* Generalized Functions. V. 1. Properties and Operations. Providence: AMS Chelsea Publishing, 1964. 423 p.
- Gingold R., Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 1977. V. 181. P. 375–389.
- Griffiths R.W.* The dynamics of lava flows // Ann. Rev. Fluid Mech. 2000. V. 32. P. 477–518.
- Hale A.J., Wadge G.* Numerical modeling of the growth dynamics of a simple silicic lava dome // Geophys. Res. Lett. 2003. V. 30. № 19. <https://doi.org/10.1029/2003GL018182>
- Harnett C.E., Thomas M.E., Purvance M.D., Neuberg J.* Using a discrete element approach to model lava dome emplacement and collapse // J. Volcanol. Geother. Res. 2018. V. 359. P. 68–77.
- Héroult A., Bilotta G., Vicari A., Rustico E., Del Negro C.* Numerical simulation of lava flow using a GPU SPH model // Ann. Geophys. 2011. V. 54. P. 600–620.
- Huppert H.E.* The propagation of two-dimensional and axisymmetric viscous gravity currents over a rigid horizontal surface // J. Fluid Mech. 1982. V. 121. P. 43–58.
- Husain T., Elsworth D., Voight B., Mattioli G., Jansma, P.* Influence of conduit flow mechanics on magma rheology and the growth style of lava domes // Geophys. J. Int. 2018. V. 213. P. 1768–1784.
- Husain T., Elsworth D., Voight B., Mattioli G., Jansma P.* Morphologic variation of an evolving dome controlled by the extrusion of finite yield strength magma // J. Volcanol. Geotherm. Res. 2019. V. 370. 51–64.
- Ismail-Zadeh A., Tackley P.* Computational Methods for Geodynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 313 p.
- Ihmsen M., Cornelis J., Solenthaler B., Horvath C., Teschner M.* Implicit incompressible SPH // IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics. 2014a. V. 20. P. 426–435.
- Ihmsen M., Orthmann J., Solenthaler B., Kolb A., Teschner M.* SPH fluids in computer graphics / Eds S. Lefebvre, M. Spagnuolo // Eurographics State of the Art Reports. 2014b. P. 21–42.
- Jeffrey D., Acrivos A.* The rheological properties of suspensions of rigid particles // AIChE J. 1976. V. 22. P. 417–432.
- Lejeune A., Richet P.* Rheology of crystal-bearing silicate melts: An experimental study at high viscosity // J. Geophys. Res. 1995. V. 100. P. 4215–4229.
- Lister J.* Viscous flows down an inclined plane from point and line sources // J. Fluid Mech. 1992. V. 242. P. 631–653
- Liu G.R., Liu M.B.* Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. Singapore: World Scientific, 2003. 472 p.
- Lucy L.* A numerical approach to the testing of fission hypothesis // Astronomical Journal. 1977. V. 82. P. 1013–1024.
- Mardles E.* Viscosity of suspensions and the Einstein equation // Nature. 1940. V. 145. P. 970.
- Melnik O., Sparks R.S.J.* Nonlinear dynamics of lava dome extrusion // Nature. 1999. V. 402. P. 37–41.
- Monaghan J.J.* Smoothed particle hydrodynamics // Annual Review of Astronomy and Astrophysics. 1992. V. 30. P. 543–574.
- Starodubtsev I., Vasev P., Starodubtseva Y., Tsepelev I.* Numerical simulation and visualization of lava flows // Scientific Visualization. 2022. V. 14. № 5. P. 66–76. <https://doi.org/10.26583/sv.14.5.05>
- Starodubtseva Y., Starodubtsev I., Ismail-Zadeh A., Tsepelev I., Melnik O., Korotkii A.* A method for magma viscosity assessment by lava dome morphology // J. Volcanol. Seismol. 2021. V. 15. № 3. P. 159–168. <https://link.springer.com/article/10.1134/S0742046321030064>
- Stasiuk M.V., Jaupart C., Sparks R.S.J.* On the variations of flow rate in non-explosive lava eruptions // Earth Planet. Sci. Lett. 1993. V. 114. P. 505–516.
- Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O., Korotkii A.* Numerical modelling of fluid flow with rafts: An application to lava flows // J. Geodyn. 2016. V. 97. P. 31–41.
- Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Starodubtseva Y., Korotkii A., Melnik O.* Crust development inferred from numerical models of lava flow and its surface thermal measurements // Ann. Geophys. 2019. V. 61. № 2. P. VO226. <https://doi.org/10.4401/ag-7745>

Tsepelev I., Ismail-Zadeh A., Melnik O. Lava dome morphology inferred from numerical modelling // *Geophys. J. Inter.* 2020. V. 223. № 3. P. 1597–1609.

Tsepelev I.A., Ismail-Zadeh A.T., Melnik O.E. Lava dome evolution at Volcán de Colima, México during 2013: Insights from numerical modeling // *J. Volcanol. Seismol.* 2021. V. 15. № 6. P. 491–501.

Vasev P., Porshnev S., Forghani M., Manakov D., Bakhterev M., Starodubtsev I. Constructing 3D scenes of scientific visualization using CinemaScience Format // *Proceedings of the 31st International Conference on Computer Graphics and Vision (GraphiCon 2021)*, Nizhny Novgorod, Russia, September 27–30, 2021 / Eds V. Galaktionov, A. Voloboy, A. Bondarev // *CEUR Workshop Proceedings*. 2021. V. 3027. P. 296–307. <https://ceur-ws.org/Vol-3027/paper29.pdf>.

Vasev P., Bakhterev M., Manakov D., Porshnev S., Forghani M. On expressiveness of visualization systems' interfaces // *Sci-*

entific Visualization. 2022. V. 14 № 5. P. 77–95. <https://doi.org/10.26583/sv.14.5.06>

Weiler M., Koschier D., Brand M., Bender J. A physically consistent implicit viscosity solver for SPH fluids // *Computer Graphics Forum*. 2018. V. 37. № 2. P. 145–155. <https://doi.org/10.1111/cgf.13349>

Zago V., Bilotta G., Hérault A. et al. Semi-implicit 3D SPH on GPU for lava flows // *Journal of Computational Physics*. 2018. V. 375. P. 854–870. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.07.060>

Zeinalova N., Ismail-Zadeh A., Melnik O.E., Tsepelev I., Zobin V.M. Lava dome morphology and viscosity inferred from data-driven numerical modeling of dome growth at Volcán de Colima, Mexico during 2007–2009 // *Frontiers in Earth Science*. 2021. V. 9. P. 735914. <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/feart.2021.735914/full>.

Three-Dimensional Numerical Modeling of Lava Dynamics Using the Smoothed Particle Hydrodynamics Method

I. S. Starodubtsev^{1, 2}, Y. V. Starodubtseva¹, I. A. Tsepelev¹, and A. T. Ismail-Zadeh^{3, *}

¹*Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Sofia Kovalevskaya str., 16, Yekaterinburg, 620990 Russia*

²*Ural Federal University, Mira str., 19, Yekaterinburg, 620002 Russia*

³*Karlsruhe Institute of Technology, Institute of Applied Geosciences, Adenauerring str., 20b, Karlsruhe, 76131 Germany*

**e-mail: alik.ismail-zadeh@kit.edu*

Lava domes and lava flows are major manifestations of effusive volcanic eruptions. Less viscous lava tends to flow long distances, depending on the volcanic slope topography, the eruption rate, and the viscosity of the erupted magma. When magma is highly viscous, its eruption to the surface leads to the formation of lava domes and their growth. The meshless smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is used in this paper to simulate lava dynamics. We describe the SPH method and present a numerical algorithm to compute lava dynamics models. The numerical method is verified by solving a model of cylindrical dam-break fluid flow, and the modelled results are compared to the analytical solution of the axisymmetric thin-layer viscous current problem. The SPH method is applied to study three models of lava advancement along the volcanic slope, when the lava viscosity is constant, depends on time and on the volume fraction of crystals in the lava. Simulation results show characteristic features of lava flows, such as lava channel and tube formation, and lava domes, such as the formation of a highly viscous carapace versus a less viscous dome core. Finally, the simulation results and their dependence on a particle size in the SPH method are discussed.

Keywords: lava dome, lava flow, viscosity, morphology, numerical analysis, scientific visualization