Современная математика и ее приложения. Том 53 (2008). С. 39–47

УДК 517.978.2

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ

© 2008 г. **Ю. В. АВЕРБУХ**

Аннотация. В работе предложен метод построения дифференциальной игры с заданным множеством успешной разрешимости задачи наведения. С использованием этого метода показано, что сечения множества успешной разрешимости могут быть достаточно нерегулярными: сечения множества успешной разрешимости могут зависеть от времен разрывно и быть несвязными множествами даже в случае связного целевого множества. Также получено достаточное условие непрерывной зависимости сечений множества успешной разрешимости от времени.

Настоящая работа посвящена изучению свойств решений дифференциальных игр [1,3]. Мы изучаем задачу наведения конфликтно-управляемой системы на заданное целевое множество. В этом случае структура решения характеризуется фундаментальной теоремой об альтернативе Н. Н. Красовского и А. И. Субботина [3]. Известны многие свойства множества успешной разрешимости задачи для первого игрока, в их числе полунепрерывность сверху по включению сечений [4, стр. 152]. В настоящей работе показано, что в общем случае полунепрерывность сверху не может быть усилена до непрерывности. При изучении этого вопроса предложен метод построения дифференциальных игр с заданным множеством успешной разрешимости. Также найдено условие, гарантирующее непрерывную зависимость сечений множества успешной разрешимости от времени. Мы рассматриваем конфликтно-управляемые системы вида

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in [t_0, \vartheta_0], \quad u \in P, \quad v \in Q. \tag{1}$$

Предполагается, что первый игрок, распоряжающийся управлением $u$, стремится привести систему на множество $M$ внутри множества $N$, $M \subset N \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, второй игрок, распоряжаясь управлением $v$, стремится не допустить этого. Задачу первого игрока в дальнейшем будем называть задачей $(M, N)$-наведения. Накладываются следующие условия: множества $P$ и $Q$ — компакты в конечномерном арифметическом пространстве, функция $f$ непрерывна по совокупности переменных, локально липшицева по фазовой переменной и удовлетворяет по ней условию подлинейного роста. Также будем предполагать, что выполнено условие седловой точки в маленькой игре (условие Айзекса):

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle \tag{2}$$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$ и $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Определим функцию $H(t, x, s)$ по правилу

$$H(t, x, s) \triangleq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle.$$

Следуя формализации, предложенной Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным [3], рассмотрим игру в классе позиционных стратегий. В качестве стратегии первого игрока мы рассматриваем произвольную функцию $U : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to P$, в качестве стратегии второго игрока — произвольную функцию $V : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to Q$. Пошаговое движение, в силу позиционной стратегии $U(t, x)$, из позиции $(t_*, x_*)$ определяется следующим образом [3]: пусть $\Delta = \{t^k\}_{k=0}^r$ — разбиение отрезка

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 06-01-00414.

$[t_*,\vartheta_0]$, $v[\cdot]$ — измеримое управление второго игрока, ломаной Эйлера $x_\Delta[t] = x_\Delta[t,t_*,x_*,U,v[\cdot]]$ называется абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнениям

$$x_\Delta[t] = x_\Delta[t^k] + \int\limits_{t^k}^{t} f(\theta, x_\Delta[\theta], u^k, v[\theta])\, d\theta \tag{3}$$

на отрезках $[t^k, t^{k+1}]$, $k = \overline{0, r-1}$; здесь $u^k = U(t^k, x_\Delta[t^k])$, $x_\Delta[t^0] = x_*$. Мы рассматриваем конструктивные движения — пределы пошаговых движений при стремлении мелкости разбиения к нулю. Обозначим множество конструктивных движений, выходящих из позиции $(t_*,x_*)$, под действием стратегии $U$ через $X[t_*,x_*,U]$. Отметим, что при упомянутых условиях из теоремы Арцелла следует, что множество $X[t_*,x_*,U]$ непусто для любой начальной позиции $(t_*,x_*)$ и любой стратегии $U$ (в связи с этим см. [3]). Аналогично определяются движения в силу стратегии второго игрока и движения в силу стратегий обоих игроков [3].

В описанной ситуации справедлива теорема об альтернативе, установленная Н. Н. Красовским и А. И. Субботиным [3]. В частности, из нее следует эквивалентность понятий множества успешной разрешимости задачи наведения и максимального $u$-стабильного моста. Множество $W$ называется стабильным в задаче $(M,N)$-наведения, если $W \subset N$, и для каждой позиции $(t_*,x_*) \in W$ и каждого $v_* \in Q$ существует решение дифференциального включения

$$\dot y(t) \in \mathrm{co}\{f(t, y(t), u, v_*) : u \in P\}, \tag{4}$$

выходящее из позиции $(t_*,x_*)$ со свойством: $(\tau, y(\tau)) \in M$ для некоторого $\tau \in [t_*,\vartheta_0]$ и $(t,y(t)) \in W$ $\forall t \in [t_*,\tau]$. Также из теоремы об альтернативы следует, что оптимальная стратегия, является экстремальной к максимальному $u$-стабильному мосту. Стратегия называется экстремальной к множеству $W$, если

$$U(t_*,x_*) \in \mathrm{Argmin}\{\max_{v\in Q}\langle w_* - x_*, f(t_*,x_*,u,v)\rangle : u \in P\},$$

где

$$w_* \in \mathrm{Argmin}\{\|w - x_*\| : (t_*, w) \in W\}.$$

Таким образом, решение дифференциальной игры сводится к построению множества успешной разрешимости задачи первого игрока. В настоящей работе показано, что множество успешной разрешимости может быть весьма нерегулярным, в частности, сечения могут зависеть от времени разрывно и быть несвязными множествами в случае связного целевого множества. А именно, существует дифференциальная игра, в которой множество успешной разрешимости равно

$$\mathcal{W} \triangleq ([0,1]\times\{0\}\times\{0\}) \cup \{(t,x_1) : t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], x_1 = 1 - \exp(t-1)\} \times \{0\} \subset [0,1]\times\mathbb{R}^2. \tag{5}$$

При этом $N = [0,1]\times\mathbb{R}^2$, $M = (1,0,0)$ (см. рис. 1).

То, что множество $\mathcal{W}$ является множеством успешной разрешимости в некоторой игре, вытекает из следующей теоремы, в которой сформулировано достаточное условие того, что некоторое замкнутое множество $W$ является множеством успешной разрешимости задачи наведения на множество $M$ для некоторой конфликтно-управляемой системы. Мы предполагаем, что целевое множество $M$ и исследуемое множество $W$ содержатся в одной и той же гиперплоскости. При формулировке теоремы считается, что $n = m+1$. Евклидову метрику в $\mathbb{R}^m$ будем обозначать через $\|\cdot\|_m$.

**Теорема 1.** *Пусть $M \subset W \subset [t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^m\times\{0\}$, множества $M$ и $W$ замкнуты. Пусть также существует константа $R > 0$ такая, что для каждой позиции $(t^*,x^*)$ из множества $W$ можно подобрать позицию $(\hat t,\hat x) \in M$ так, что $\hat t \geqslant t^*$, а $\|\hat x - x^*\| \leqslant R(\hat t - t^*)$, при чем для всех $t \in [t^*,\hat t]$ существует $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ со свойствами: $(t,x) \in W$ и $\|x - x^*\| \leqslant R(t - t^*)$. В этом случае можно подобрать дифференциальную игру, удовлетворяющую наложенным условиям, включая условие седловой точки в маленькой игре такую, что $W$ является множеством успешной разрешимости задачи $(M,[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^{m+1})$-наведения в этой игре.*

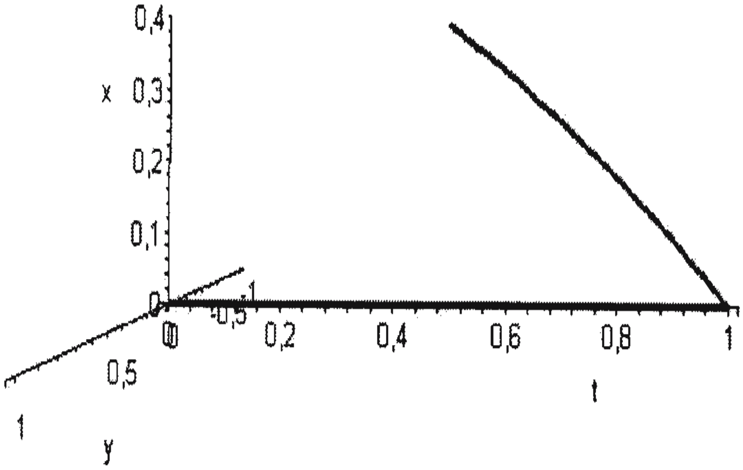


Рис. 1. Множество $\mathcal{W}$

*Доказательство.* Для замкнутого множества $K \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^{m+1}$

$$\chi_{K,\varepsilon}(t,x) \triangleq \frac{\mathbf{d}((t,x),K_\varepsilon)}{\mathbf{d}((t,x),K_\varepsilon) + \mathbf{d}((t,x),K)}, \tag{6}$$

где

$$K_\varepsilon \triangleq \{(t,x) \in [t_0,\vartheta_0] \times \mathbb{R}^n : \mathbf{d}((t,x),K) \geqslant \varepsilon\}; \tag{7}$$

а $\mathbf{d}((t,x),C) \triangleq \min\{\max\{\|x-y\|, |t-\tau|\} : (\tau,y) \in C\}$ — расстояние от позиции $(t,x)$ до замкнутого множества $C \subset [t_0,\vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Заметим, что функция $\chi_{K,\varepsilon}(\cdot,\cdot)$ является липшицевой, и $0 \leqslant \chi_{K,\varepsilon}(t,x) \leqslant 1$, $\chi_{K,\varepsilon}(t,x) = 1 \Leftrightarrow (t,x) \in K$. Определим конфликтно-управляемую систему следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= Ru_i, \quad i = \overline{1,m}, \\ \dot{x}_{m+1} &= \chi_{W,\varepsilon}(t,x)u_{m+1} - v, \end{cases} \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i|^2 \leqslant 1; \quad u_{m+1}, v \in [-1,1].$$

Вначале мы покажем, что позиции, не лежащие на множестве $W$, не принадлежат мосту. Более того, для них второй (распоряжающийся управлением $v$) игрок имеет выигрышную программную стратегию. Пусть $(t^*,x^*) \notin W$. Рассмотрим вначале случай $x^*_{m+1} \neq 0$. Программное управление второго игрока положим равным $v = -\operatorname{sgn}(x^*_{m+1})$. Поскольку при $x_{m+1} \neq 0$ $\chi_{W,\varepsilon}(t,x) < 1$, то при $u_{m+1} \in [-1,1]$

$$\chi_{W,\varepsilon}(t,x)u_{m+1} - v > 0, \quad x^*_{m+1} > 0;$$
$$\chi_{W,\varepsilon}(t,x)u_{m+1} - v < 0, \quad x^*_{m+1} < 0.$$

Следовательно, $|x_{m+1}|$ не убывает в случае, когда мы рассматриваем ломаные Эйлера. Переходя к пределу, получаем, что $|x_{m+1}|$ не убывает вдоль конструктивных движений. А значит, позиции $(t,x)$ с $x_{m+1} \neq 0$ не могут принадлежать множеству успешной разрешимости в рассматриваемой задаче. Пусть теперь $(t^*,x^*) \notin W$, а $x^*_{m+1} = 0$. Обозначим $\rho \triangleq \mathbf{d}((t^*,x^*),W)$. Пусть $\tau$ положительно и не превосходит $\rho/2$. Для $t \in [t^*, t^*+\tau]$ при любом выборе управлений

$$\|x(t) - x_*\|_m \leqslant \int\limits_{t^*}^{t} \|u(\xi)\|_m \, d\xi \leqslant \tau \leqslant \frac{\rho}{2}. \tag{9}$$

Следовательно, $\mathbf{d}((t,x(t)),W)\leqslant\rho/2$. Поэтому при любом выборе управлений $u$, $v$ $(t,x_1(t),x_2(t))\notin W$ $\forall t\in[t^*,t^*+\tau]$. Отсюда имеем, что

$$\max\{\chi_{W,\varepsilon}(t,x): t\in[t^*,t^*+\tau],\,|x_1-x_1^*|\leqslant\tau\}\leqslant$$
$$\leqslant\max\left\{\chi_{W,\varepsilon}(t,x_1,x_2): t\in[t^*,t^*+\tau],\,|x_1-x_1^*|\leqslant\frac{\rho}{2}\right\}<1. \tag{10}$$

Введем обозначение $L\triangleq 1-\max\{\chi_{W,\varepsilon}(t,x_1,x_2): t\in[t^*,t^*+\tau],\,|x_1-x_1^*|\leqslant\rho/2\}$. Предположим, что второй игрок выбрал управление $v=1$. Тогда, в силу (9) и (10), при любом выборе управления первого игрока будут справедливы неравенства

$$x_2(t^*+\tau)=\int\limits_{t^*}^{t^*+\tau}(1-\chi_{W,\varepsilon}(t,x_1(\xi),x_2(\xi))u_2(\xi))\,d\xi\geqslant$$
$$\geqslant\int\limits_{t^*}^{t^*+\tau}\left(1-\max\left\{\chi_{W,\varepsilon}(t,x_1,x_2): t\in[t^*,t^*+\tau],\,|x_1-x_1^*|\leqslant\frac{\rho}{2}\right\}\right)d\xi\geqslant L\tau>0.$$

Следовательно, если $(t^*,x^*)\notin W$, $x^*_{m+1}=0$, то через промежуток времени $\tau$ система окажется в множестве $\{(t,x): x_{m+1}\geqslant L\tau\}$, которое не пересекается с множеством успешной разрешимости задачи наведения на $M$ в силу того, что $L>0$. Это рассуждение верно в случае, когда мы рассматриваем ломаные Эйлера. Переходя к пределу, получаем, что точки $(t,x)$ со свойством $(t,x)\notin W$ не принадлежат множеству успешной разрешимости задачи наведения в рассматриваемой дифференциальной игре. Докажем, что $W$ есть $u$-стабильный мост в задаче наведения на множество $M$.

Пусть $(t^*,x^*)\in W$, $v_*\in Q$. Сформируем управление $u(\cdot)$, позволяющее удержать движение, в силу системы (8), на $W$ вплоть до встречи с $M$. Для этого применим следующую процедуру. Пусть $\Delta=\{t^k\}_{k=0}^r$ — разбиение промежутка $[t^*,\vartheta_0]$. Положим $\tilde{x}^0=x^*$. Из предположения теоремы следует, что для каждого $k=\overline{0,r-1}$

- либо существует $\tilde{x}^{k+1}$ со свойством
$$(t^{k+1},\tilde{x}^{k+1})\in W,\quad \|\tilde{x}^{k+1}-\tilde{x}^k\|\leqslant R|t^{k+1}-t^k|,$$
- либо существуют $\hat{x}^k,\hat{t}^k\in[t^k,t^{k+1}]$ такие, что
$$(\hat{t}^k,\hat{x}^k)\in M\quad\text{и}\quad\|\hat{x}^k-\tilde{x}^k\|\leqslant R|\hat{t}^k-t^k|.$$

Таким образом, по заданному разбиению $\Delta$ можно выбрать $j$ со свойством: существуют $t'\in[t^j,t^{j+1}]$, $x'\in\mathbb{R}^{m+1}$ такие, что $(t',x')\in M$ и для всех $k=\overline{1,j}$ существуют $\tilde{x}^k$ такие, что $(t^k,\tilde{x}^k)\in W$, при этом $\|\tilde{x}^k-\tilde{x}^{k-1}\|\leqslant R|t^k-t^{k-1}|$ и $\|x'-\tilde{x}^j\|\leqslant R|t'-t^j|$. Определим для $i=\overline{1,m}$

$$(u^\Delta(t))_i\triangleq\begin{cases}(\tilde{x}^k-\tilde{x}^{k-1})/R, & t\in[t^{k-1},t^k],\quad k=\overline{1,j},\\ (x'-\tilde{x}^j)/R, & t\in[t^j,t'],\\ 0, & t\in[t',\vartheta_0].\end{cases}$$

Заметим, что $\|u\|_m\leqslant 1$. Определим функцию $y(\cdot,t_*,x_*,\Delta): [t_0,\vartheta_0]\to\mathbb{R}^{m+1}$ по правилу: для $i=\overline{1,m}$ положим

$$(y(t,t^*,x^*,\Delta))_i\triangleq x_*+\int\limits_{t^*}^{t}(u^\Delta(\xi))_i\,d\xi,$$
$$(y(t,t^*,x^*,\Delta))_{m+1}\triangleq 0.$$

Очевидно, что $y(\cdot,t^*,x^*,\Delta)$ липшицева с константой $R$. Расстояние от $y(t,t^*,x^*,\Delta)$ до $W[t]$ на промежутке $[t^*,t']$ не превосходит $Rd(\Delta)/2$.

Если $\{\Delta_l\}_{l=0}^\infty$ — последовательность разбиений, то получающийся при каждом фиксированном разбиении момент встречи с множеством $M$ обозначим через $t'_l$.

Существует последовательность разбиений $\Delta_l$ такая, что $d(\Delta_l) \to 0$, $t_l' \to \tau'$, и последовательность функций $\{y(\cdot, t^*, x^*, \Delta_l)\}_{l=1}^{\infty}$ равномерно сходится к некоторой функции $z(\cdot, t^*, x^*)$. Имеем

- $(z(t, t_*, x_*))_{m+1} = 0$,
- функция $z(\cdot, t^*, x^*)$ липшицева с константой $R$,
- $(\tau', z(\tau', t^*, x^*)) \in M$,
- расстояние от $(t, z(t, t^*, x^*))$ до $W$ равно 0 для всех $t \in [t_*, \tau']$,
- $z(t_*, t_*, x_*) = x_*$.

Так как функция $z(\cdot, t^*, x^*)$ липшицева с константой $R$, то существует измеримая функция $w(\cdot) : [t_0, \vartheta_0] \to \mathbb{R}^m$, $\|w(t)\|_m \leqslant 1$ п. в. на $[t_0, \vartheta_0]$,

$$z(t, t^*, x^*) = x_* + \int\limits_{t^*}^{t} Rw(\xi)\, d\xi.$$

Пусть $(t_*, x_*) \in W$, $v_* \in [-1, 1]$, определим $u^*(\cdot)$ по правилу $u_i^*(t) \triangleq w_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, $u_{m+1}^* \triangleq v_*$. Заметим, что $\sum\limits_{i=1}^{m} |u_i^*(t)|^2 \leqslant 1$, $u_{m+1}^* \in [-1, 1]$, и $z(t, t_*, x_*)$ есть решение уравнения (8) с подстановкой $u^*(t)$ вместо $u$, $v_*$ вместо $v$ и с начальными данными $x(t_*) = x_*$. Из этого следует, что $W$ — $u$-стабильный мост в задаче наведения на $M$. □

Непосредственно проверяется, что множества $\mathcal{W}$, определяемое в (5), и $M = \{(1, 0, 0)\}$ удовлетворяют условиям теоремы 1, при этом константа $R = 1$.

В следующих утверждениях рассмотрен вопрос о том, когда сечения множества успешной разрешимости задачи первого игрока регулярно зависят от времени. Мы рассматриваем задачу $(M, N)$-наведения для систем вида (1) и считаем, что множества $M$, $N$ и система (1) фиксированы. Множество успешной разрешимости в задаче наведения обозначаем через $\mathfrak{W}$.

**Теорема 2.** *Пусть $t_*, t^* \in [t_0, \vartheta_0]$, $t_* < t^*$, и $x_* \in \mathbb{R}^n$. Пусть также позиция $(t^*, x_*)$ принадлежит множеству успешной разрешимости $\mathfrak{W}$ в задаче $(M, N)$-наведения, $[t_*, t^*] \times \{x_*\} \subset N$ и $H(t, x, s) \leqslant 0$ для всех $t \in [t_*, t^*]$, $x \in O_\gamma(x_*)$ ($\gamma$ — некоторое положительное число), $s \in \mathbb{R}^n$. Тогда $(t, x_*) \in \mathfrak{W}$ для всех $t \in [t_*, t^*]$.*

*Доказательство.* Докажем, что множество $W = [t_*, t^*] \times \{x_*\}$ вложено в множество успешной разрешимости задачи наведения. Пусть $U_1$ — стратегия, экстремальная к множеству $W$. Покажем, что $x[t] = x_*$ для всех конструктивных движений $x[\cdot] \in X[\theta, x_*, U_1]$, $\theta \in [t_*, t^*]$ и $t \in [\theta, t^*]$.

Пусть $G$ — замкнутая ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ такая, что любая траектория, в силу рассматриваемой управляемой системы выходящая из любой позиции, принадлежащей $W$, не покидает $G$. В силу условия подлинейного роста, $G$ ограничено. Обозначим

$$K \triangleq \sup\{\|f(t, x, u, v)\| : t \in [t_*, t^*],\, x \in G,\, u \in P,\, v \in Q\}.$$

Из непрерывности функции $f(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ на компакте $[t_0, \vartheta_0] \times G \times P \times Q$ следует, что существует функция $\varepsilon(\delta)$ такая, что

$$\|f(t_1, x_1, u, v) - f(t_2, x_2, u, v)\| \leqslant \varepsilon(\delta)$$

для всех $t_1, t_2 \in [t_0, \vartheta_0]$, $x_1, x_2 \in G$, $u \in P$, $v \in Q$, $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$, $\|x_1 - x_2\| \leqslant K\delta$.

Обозначим

$$\omega(\delta) \triangleq K^2\delta + L\varepsilon(\delta).$$

Здесь $L \triangleq \max\{\|x - x_*\| : x \in G\}$. Заметим, что $\omega(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$.

Пусть $\Delta = \{\tau^k\}_{i=0}^{r}$ — разбиение отрезка $[\theta, t^*]$ такое, что

$$\max_i |\tau^k - \tau^{k-1}| \leqslant \delta, \quad \omega(\delta) \leqslant \gamma,$$

$v[\cdot]$ — некоторое управление второго игрока. Рассмотрим $x[t] = x_\Delta[t, \theta, x_*, U_1, v[t]]$, $t \in [\theta, t^*]$, и докажем, что

$$\|x[t] - x_*\|^2 \leqslant \omega(\delta)[t - t_*]. \tag{11}$$

Обозначим $u^k \triangleq U_1(\tau^k, x[\tau^k])$. Пусть вначале $t \in [\tau^0, \tau^1]$.

$$\|x[t] - x_*\|^2 \leqslant \left[\int\limits_{\tau^k}^{t} \|f(\xi, x[\xi], u^0, v[\xi])\| \, d\xi\right]^2 \leqslant K^2[t-\tau^0]^2 \leqslant \omega(\delta)[t-\tau^0].$$

Пусть теперь (11) верно для $t \in [\tau^0, \tau^k]$. Докажем (11) для $t \in [\tau^k, \tau^{k+1}]$. Пользуясь представлением (3), получаем, что

$$\|x[t] - x_*\|^2 = \left\langle x[t] - x[\tau^k] + x[\tau^k] - x_*, \int\limits_{\tau^k}^{t} f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi])\, d\xi + x[\tau^k] - x_* \right\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \int\limits_{\tau^k}^{t} f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi])\, d\xi \right\|^2 + 2\left\langle x[\tau^k] - x_*, \int\limits_{\tau^k}^{t} f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi])\, d\xi \right\rangle + \|x[\tau^k] - x_*\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant K^2[t-\tau^k]^2 + K^2\delta[\tau^k - \tau^0] + 2\int\limits_{\tau^k}^{t} \langle x[\tau^k] - x_*, f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi])\rangle \, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant K^2\delta[t-\tau^0] + 2\int\limits_{\tau^k}^{t} \langle x[\tau^k] - x_*, f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi])\, d\xi\rangle. \qquad (12)$$

Оценим

$$\int_{\tau^k}^{t} \langle x[\tau^k] - x_*, f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi])\rangle.$$

$$\langle x[\tau^k] - x_*, f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi])\rangle =$$

$$= \langle x[\tau^k] - x_*, f(\tau^k, x[\tau^k], u^k, v[\xi])\rangle + \langle x[\tau^k] - x_*, f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi]) - f(\tau^k, x[\tau^k], u^k, v[\xi])\rangle.$$

Поскольку $|\xi - \tau^k| \leqslant \delta$ и $\|x[\xi] - x[\tau^k]\| \leqslant K\delta$,

$$\|f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi]) - f(\tau^k, x[\tau^k], u^k, v[\xi])\| \leqslant \varepsilon(\delta).$$

Следовательно,

$$\langle x[\tau^k] - x_*, f(\xi, x[\xi], u^k, v[\xi]) - f(\tau^k, x[\tau^k], u^k, v[\xi])\rangle \leqslant L\varepsilon(\delta). \qquad (13)$$

Докажем теперь, что

$$\langle x[\tau^k] - x_*, f(\tau^k, x[\tau^k], u^k, v[\xi])\rangle \leqslant 0. \qquad (14)$$

В самом деле, стратегия $U_1$ экстремальна к множеству $[t_*, t^*] \times \{x_*\}$, т.е. $u^k = U_1(\tau^k, x[\tau^k])$ выбирается из условия

$$\max_{v\in Q}\langle x[\tau^k] - x_*, f(\tau^k, x[\tau^k], u^k, v)\rangle = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle x[\tau^k] - x_*, f(\tau^k, x[\tau^k], u, v)\rangle.$$

Поскольку $\|x[\tau^k] - x_*\| \leqslant \omega(\delta) \leqslant \gamma$, по условию теоремы имеем

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle x[\tau^k] - x_*, f(\tau^k, x[\tau^k], u, v)\rangle = H(\tau^k, x[\tau^k], x[\tau^k] - x_*) \leqslant 0.$$

Объединяя неравенства (12), (13), (14), получаем, что неравенство (11) доказано. Устремляя $\delta$ к нулю, получаем, что $x[t, \theta, x_*, U_1] = x_*$ для всех конструктивных движений $x[\cdot, \theta, x_*, U_1]$, $\theta \in [t_*, t^*]$, $t \in [\theta, t^*]$.

Следовательно, множество $[t_*, t^*] \times \{x_*\}$ вложено в множество успешной разрешимости задачи $(\{(t^*, x_*)\}, N)$-наведения в классе позиционных стратегий. Обозначим это множество через $\widehat{W}$. По теореме об альтернативе множество $\widehat{W}$ является максимальным $u$-стабильным мостом в задаче $(\{(t^*, x_*)\}, N)$-наведения.

Докажем, что множество $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$ является $u$-стабильным мостом в задаче $(M, N)$-наведения. В самом деле, $M \subset \mathfrak{W} \cup \widehat{W} \subset N$. Пусть теперь $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathfrak{W} \cup \widehat{W}$. Если $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathfrak{W}$, то по определению

$\mathfrak{W}$ для каждого $v_* \in Q$ существует решение дифференциального включения (4) с начальными данными $y(\hat{t}) = \hat{x}$, содержащееся в $\mathfrak{W}$ вплоть до встречи с $M$. Пусть $(\hat{t}, \hat{x}) \in \widehat{W}$. Зафиксируем $v_* \in Q$. По определению $\widehat{W}$ для каждого $v_* \in Q$ существует решение включения (4) $y_1(\cdot)$, со свойствами: $y_1(\hat{t}) = \hat{x}$, $y_1(t) \in \widehat{W}$ для всех $t \in [\hat{t}, t^*]$, $y_1(t^*) = x_*$. Поскольку $\mathfrak{W}$ является максимальным $u$-стабильным мостом в задаче $(M, N)$-наведения, существует функция $y_2(\cdot)$, являющаяся решением дифференциального включения (4) со свойствами $y_2(t^*) = x_*$, $(\xi^*, y_2(\xi^*)) \in M$ для некоторого $\xi^* \in [t^*, \vartheta_0]$ и $(t, y_2(t)) \in \mathfrak{W}$ для всех $t \in [t^*, \xi^*]$. Определим функцию $y^*(\cdot) : [\hat{t}, \vartheta_0]$ следующим образом:

$$y^*(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [\hat{t}, t^*], \\ y_2(t), & t \in [t^*, \vartheta_0]. \end{cases}$$

Функция $y^*(\cdot)$ абсолютно непрерывна, является решением дифференциального включения (4) при фиксированном $v_*$, $(\xi^*, y^*(\xi^*)) \in M$, $(t, y^*(t)) \in \mathfrak{W} \cup \widehat{W}$, $t \in [\hat{t}, \xi^*]$. Таким образом, для каждого $(\hat{t}, \hat{x})$ и $v_* \in Q$ существует решение дифференциального включения (4), выходящее из $(\hat{t}, \hat{x})$ и содержащееся в $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$ вплоть до встречи с $M$.

Поскольку множество $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$ является $u$-стабильным мостом в задаче $(M, N)$-наведения, а множество $\mathfrak{W}$ по определению — наибольший стабильный мост, имеем $\widehat{W} \subset \mathfrak{W}$. Следовательно, $[t_*, t^*] \times \{x_*\} \subset \widehat{W} \subset \mathfrak{W}$.

$\square$

Далее рассмотрим вопрос о геометрических свойствах множества успешной разрешимости задачи первого игрока. А именно, докажем, что сечение множества успешной разрешимости задачи наведения зависит от времени непрерывно в случае неположительности гамильтониана и условия, имеющего смысл невозрастания фазовых ограничений по сечениям. Сечением множества $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ при $t \in [t_0, \vartheta_0]$ называется множество $E[t] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : (t, x) \in E\}$. Будем говорить, что множество $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ не возрастает по сечениям, если $E[t_*] \subset E[t^*]$ для всех $t_*, t^* \in [t_0, \vartheta_0]$, $t_* \leqslant t^*$. Обозначим

$$N^{[\gamma]} \triangleq \{(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n : \mathbf{d}(x, N[t]) \leqslant \gamma\}.$$

Мы рассматриваем сечение множества $E$ как многозначное отображение $t \mapsto E[t]$. Следуя [2, 4], обозначим

$$\limsup_{t \to t_*} E[t] \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n : \liminf_{t \to t_*} \mathbf{d}(y, E[t]) = 0\};$$
$$\liminf_{t \to t_*} E[t] \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{t \to t_*} \mathbf{d}(y, E[t]) = 0\}.$$

Рассмотренные множества называются верхним и нижним пределами многозначного отображения соответственно [2, 4]. Имеет место включение

$$\liminf_{t \to t_*} E[t] \subset \limsup_{t \to t_*} E[t]. \tag{15}$$

Если $E_1$ и $E_2$ — множества в пространстве позиций такие, что $E_1 \subset E_2 \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, то для каждого $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$

$$\liminf_{t \to t_*} E_1[t] \subset \liminf_{t \to t_*} E_2[t]. \tag{16}$$

Аналогично вводятся правый (левый) верхний и нижний пределы многозначного отображения. Также для правых (левых) пределов справедливы неравенства (15) и (16). Многозначное отображение называется полунепрерывным сверху, если выполняется включение

$$\limsup_{t \to t_*} E[t] \subset E[t_*] \quad \forall t_* \in [t_0, \vartheta_0];$$

полунепрерывным снизу, если выполняется включение

$$E[t_*] \subset \liminf_{t \to t_*} E[t] \quad \forall t_* \in [t_0, \vartheta_0].$$

Многозначное отображение непрерывно, если полунепрерывно сверху и снизу [2]. Аналогично вводятся понятия полунепрерывности сверху (снизу) и непрерывности справа и слева соответственно. Отметим, что если $E$ — замкнутое множество, то отображение $t \mapsto E[t]$ всегда полунепрерывно сверху. Таким образом, для замкнутых множеств полунепрерывность снизу и непрерывность эквивалентны.

**Теорема 3.** *Пусть $N$ не возрастает по сечениям и $H(t,x,s) \leqslant 0$ для всех $(t,x) \in N^{[\gamma]}$, $s \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

1) *если отображение $t \mapsto M[t]$ непрерывно справа, то сечения множества успешной разрешимости задачи наведения непрерывно зависят от времени;*
2) *если $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$ и $M$ линейно связно, то и сечения множества успешной разрешимости задачи наведения — линейно связные множества.*

*Доказательство.* Рассмотрим вначале п. 1). Пусть $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$.

Докажем, что

$$\mathfrak{W}[t_*] \subset \liminf_{t \to t_*+0} \mathfrak{W}[t]. \tag{17}$$

$$\mathfrak{W}[t_*] \subset \liminf_{t \to t_*-0} \mathfrak{W}[t]. \tag{18}$$

Пусть $x \in \mathfrak{W}[t_*]$. Если $x \in M[t_*]$, то, поскольку отображение $t \mapsto M[t]$ полунепрерывно снизу справа, имеем

$$x \in \liminf_{t \to t_*+0} M[t]. \tag{19}$$

Поскольку $M \subset \mathfrak{W}$, из свойства монотонности верхнего предела (см (16)) и включения (19) следует, что

$$x \in \liminf_{t \to t_*+0} \mathfrak{W}[t].$$

Если $x \in \mathfrak{W}[t_*] \setminus M[t_*]$, то, поскольку $\mathfrak{W}$ $u$-стабильно, можно подобрать $\tau \in (t_*, \vartheta_0]$ такое, что для любого $t \in [t_*, \tau]$ существует $z \in \mathfrak{W}[t]$ со свойством: $\|z - x\| \leqslant K(t - t_*)$ (здесь $K$ — некоторая величина, зависящая от позиции $(t_*, x)$). Отсюда имеем оценку $\mathbf{d}(x, \mathfrak{W}[t]) \leqslant K(t - t_*)$. Следовательно,

$$x \in \liminf_{t \to t_*+0} \mathfrak{W}[t].$$

Из этого включения следует, что

$$\mathfrak{W}[t_*] \subset \liminf_{t \to t_*+0} \mathfrak{W}[t]. \tag{20}$$

Таким образом, включение (17) доказано.

Если $x \in \mathfrak{W}[t_*]$, то из теоремы 2 следует, что $x \in \mathfrak{W}[t]$, $t < t_*$. Следовательно,

$$x \in \liminf_{t \to t_*-0} \mathfrak{W}[t].$$

Таким образом, включение (18) также выполняется. Поскольку включения (17) и (18) справедливы для любого $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, многозначное отображение $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$ полунепрерывно снизу на отрезке $[t_0, \vartheta_0]$. Так как множество $\mathfrak{W}$ замкнуто, то отображение $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$ непрерывно на отрезке $[t_0, \vartheta_0]$.

Перейдем к доказательству п. 2). Пусть $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{W}[t_*]$. Выберем $v_* \in Q$. Поскольку множество $\mathfrak{W}$ $u$-стабильно, существуют решения дифференциального включения $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, y(t), u, v_*) : u \in P\}$$

с начальными данными $y_1(t_*) = x_1$ и $y_2(t_*) = x_2$ такие, что $(\vartheta_0, y_i(\vartheta_0)) \in M$, $y_i(t) \in \mathfrak{W}[t]$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$. Поскольку $M$ — связное множество, существует кривая $\{(\vartheta_0, \zeta_0(\lambda)) : \lambda \in [0,1]\} \subset M$, соединяющая точки $(\vartheta_0, y_1(\vartheta_0))$ и $(\vartheta_0, y_2(\vartheta_0))$. Тогда рассмотрим кривую $\{(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)) : \lambda \in [0,3]\}$ в пространстве $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$:

$$(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)) \triangleq \begin{cases} (t_* + \lambda(\vartheta_0 - t_*), y_1(t_* + \lambda(\vartheta_0 - t_*))), & \lambda \in [0,1], \\ (\vartheta_0, \zeta_0(\lambda - 1)), & \lambda \in [1,2], \\ (\vartheta_0 + (\lambda - 2)(t_* - \vartheta_0), y_2(\vartheta_0 + (\lambda - 2)(t_* - \vartheta_0))), & \lambda \in [2,3]. \end{cases}$$

Эта кривая соединяет точки $(t_*, x_1)$ и $(t_*, x_2)$ в пространстве $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. При этом $(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)) \in \mathfrak{W}$ по построению. Также $\xi(\lambda) \geqslant t_*$, $\lambda \in [0, 3]$. Следовательно, по теореме 2 имеем $\zeta(\lambda) \in \mathfrak{W}[t_*]$, $\lambda \in [0, 3]$. Поскольку $\zeta(0) = x_1$, $\zeta(3) = x_2$, п. 2) доказан.

$\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967.
2. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введениев теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: КомКнига, 2005.
3. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционые дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974.
4. *Субботин А. И.* Обобщенные решения дифференцильных уравнений 1-го порядка. — Ижевск: РХД, 2003.



Ю. В. Авербух

Институт математики и механики Уральского отделения РАН

E-mail: `ayv@imm.uran.ru`