Две модели динамики населения

Юрий Авербух

Настоящая заметка посвящена вопросам оценивания населения некоторой гипотетической страны. Точность моделей весьма относительна. Я подозреваю, что существуют более тонкие и точные модели, но искать и изучать мне недосуг, а прикинуть интересно. Вначале рассмотрим случай общества в котором практически нет пенсионеров. Эта модель применима к архаическим обществам. Потом рассмотрим случай когда значительная часть населения достигает пенсионного возраста, что соответствует обществу индустриального типа.

1 Простая модель

Итак исходные понятия: будем предполагать, что все население может быть разделено на три возрастных группы (поколения): дорепродуктивный, репродуктивный, пострепродуктивный. Время пребывания в каждой группе будем считать постоянным. Соответственно время делится на периоды и мы будем наблюдать за динамикой численности населения в начале каждого периода. Важную роль играет коэффициент рождаемости α – половина среднего количества детей на одну женщину. Будем считать, что мощность нового дорепродуктивного поколения равна двойному коэффициенту рождаемости на женщину, умноженному на количество женщин и делится в гендерном отношении пополам.

Введем теперь переменные: n – номер периода; X_n^1, X_n^2, X_n^3 – количество мужчин во время n-го периода дорепродуктивного, репродуктивного и пострепродуктивного возраста соответственно. Аналогичные переменные для количества женщин Y_n^1, Y_n^2, Y_n^3.

Выпишем теперь правила пересчета количества населения за период. Как говорилось выше количество людей в дорепродуктивном возрасте равно двойному коэффициенту рождаемости умноженному на количество репродуктивного возраста женщин в предыдущий период. Будем предполагать, что мальчиков и девочек рождается одинаковое количество. Пересчет остальных возрастов ведется путем учета старания.

Таким образом получаем, что

$$\begin{array}{rcl} X_{n+1}^1 & = & \alpha Y_n^2; \\ Y_{n+1}^1 & = & \alpha Y_n^2; \\ X_{n+1}^2 & = & X_n^1; \\ Y_{n+1}^2 & = & Y_n^1; \\ X_{n+1}^3 & = & X_n^2; \\ Y_{n+1}^3 & = & X_n^3. \end{array}$$

Сделаем еще одно предположение. Будем считать, что в начальный момент количество мужчин и женщин было одинаковым (собственно это предположении несущественно на фоне предположения об одинаковости жизненного пути мужчин и женщин). Тогда можно ввести новые переменные Z_n^1, Z_n^2, Z_n^3 – количество людей в каждом из возрастов. Папарно суммируя правила пересчета получаем, что

$$\begin{aligned} Z_{n+1}^1 &= \alpha Z_n^2; \\ Z_{n+1}^2 &= Z_n^1; \\ Z_{n+1}^3 &= Z_n^2; \end{aligned}$$

На основе этого правила пересчета можно посчитать динамику населения. К примеру предположим, что в начальный момент времени население было равномерно распределено по возрастам. Примем мощность каждого поколения за 1. Тогда имеем следующую динамику по периодам

период	1	2	3	сумма
0	1	1	1	3
1	α	1	1	2+α
2	α	α	1	$1+2\alpha$
3	α^2	α	α	$\alpha(2+\alpha)$
4	α^2	α^2	α	$\alpha(1+2\alpha)$
5	α^3	α^2	α^2	$\alpha^2(2+\alpha)$

2 Сложная модель

Основное отличие этой модели от рассмотренной в предыдущем пункте – введение 4-го возраста – пенсионного. При этом мы считаем, что все люди доживают до пенсионного возраста (что делает нашу модель излишне оптимистичной). А мощность пенсионного возраста характеризуется коэффициентом β. Пересчет первых трех возрастов осуществляется также как в простой модели. Кроме этого надо ввести правило пересчета четвертого возраста. Мощность пенсионного возраста в (n+1)-й период связана с мощностью пострепродуктивного возраста в n-м периоде следующим соотношением:

$$Z_{n+1}^4 = \beta Z_n^3.$$

Коэффициент β связан со средней продолжительностью жизни T (которая по нашему предположению превосходит три размера периода) следующим образом

$$\beta = \frac{T-3k}{k},$$

здесь k – положительность периода.

Для примера рассмотрим случай когда первые три возраста равномощны, а 4-й определяется коэффициентом β. Приняв мощность первых трех возрастов за 1, имеем

период	1	2	3	4	сумма
0	1	1	1	β	$3+\beta$
1	α	1	1	β	$\alpha+2+\beta$
2	α	α	1	β	$2\alpha+1+\beta$
3	α^2	α	α	β	$\alpha(\alpha+2)+\beta$
4	α^2	α^2	α	$\alpha\beta$	$\alpha(2\alpha+1+\beta)$

Несложные вычисления, которые каждый может сделать на калькуляторе, говорят, что в государстве, в котором сегодня численность населения 142 млн, при средней продолжительности жизни в 65 лет, и 1.35 детях на одну женщину, к 2050 году население уменьшится до 113 млн (мы считаем продолжительность поколения за 20 лет). Эти данные неплохо согласуются с расчетами экспертов ООН, которые дают цифру в 100 млн. Надо не забывать при их сравнении, что наша модель излишне оптимистическая.