Некоторые конструкции, связанные с методом программных итераций

Ю.В.Авербух, А.Г.Ченцов

Институт Математики и Механики
Уральского Отделения
Российской Академии Наук
ayv@imm.uran.ru, chentsov@imm.uran.ru

IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике,
Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 года

Дифференциальная игра

Рассматривается управляемая система вида

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \ t \in [t_0, \vartheta_0], \ x \in \mathbb{R}^n, \ u \in P, v \in Q.$$

Переменные u и v – управления первого и второго игрока соответсвенно.

Цели игроков

Первый игрок стремится привести систему на множество M, $M \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ в некоторый момент времени, второй игрок стремится не допустить этой встречи.

Условия

- M – замкнутое множество;
- P и Q – компакты;
- f локально липшицева
- f удовлетворяет условию подлинейного роста;
- *условие седловой точки в маленькой игре*:

$$\min_{u\in P}\max_{v\in Q} < s, f(t,x,u,v) >= \max_{v\in Q}\min_{u\in P} < s, f(t,x,u,v) > .$$

Стратегии и движения

Используются позиционная формализация Н.Н.Красовского

Пусть $U : [t_0, \vartheta_0] \times \to \mathbb{R}^n$ – позиционная стратегия, $[t_*, \vartheta_0]$ $\Delta = t_* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n = \vartheta_0$ разбиение отрезка. Любая функция, удовлетворяющая условиям

$$\dot{x}(t) \in \{f(t, x(t), U(\tau_i, x(\tau_i)), v) : v \in Q\}, t \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$$

$x(t_*) = x_*$ называется ломаной Эйлера.

Конструктивные движения

Пределы ломаных Эйлера называются конструктивными движениями, порожденными стратегией U, выходящими из позиции (t_*, x_*).

Использование в качестве позиционных стратегий разрывных функций существенно (Н.Н.Суботина, А.И.Субботин)

Множество позиционного поглощения

Структура решения дифференциальной игры характеризуется теоремой об альтернативе, установленной Н.Н.Красовским и А.И.Субботиным.

Определение

Множество $W \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ называется u-стабильным мостом если:

1. $M \subset W$
2. $\forall v_* \in Q, \forall (t_*, x_*) \in W \exists y(\cdot)$
$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, x, u, v_*) : u \in P\}, \; y(t_*) = x_*,$$
$$\exists \theta \in [t_*, \vartheta_0] : \; ((\theta, y(\theta) \in M)\&$$
$$((t, y(t)) \in W, \; \forall t \in [t_*, \theta]).$$

Пусть $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

$A(E) \triangleq \{(t, x) \in E|$ для каждого управления $v(t)$ существует решение дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, y(t), u, v(t))|u \in P\},$$

$y(t) = x$ со свойством $(\theta, y(\theta)) \in M$ для некоторого $\theta \in [t, \vartheta_0]$ и $(t, y(t)) \in E\ \forall t \in [t, \theta]\ \}$

$\mathbf{A}(E) \triangleq \{(t, x) \in E|$ для каждого *постоянного* управления v^* существует решение дифференциального включения

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, y(t), u, v^*)|u \in P\},$$

$y(t) = x$ со свойством $(\theta, y(\theta)) \in M$ для некоторого $\theta \in [t, \vartheta_0]$ и $(t, y(t)) \in E\ \forall t \in [t, \theta]\ \}$

Последовательности множеств

Определение

$$W^{(0)} \triangleq [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n,$$

$$W^{(k)} = A(W^{(k-1)}), \ k > 0.$$

$$W_0 \triangleq [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n,$$

$$W_k = \mathbf{A}(W_{k-1}), \ k > 0.$$

Свойства

$$W^{(k)} \downarrow \mathfrak{W}.$$

$$W_k \downarrow \mathfrak{W}.$$

$\mathfrak{W}$ – множество позиционного поглощения.

$$W^{(k)} \subset W_k.$$

Результаты:

Пусть M– компакт. Тогда

1. Последовательности $W^{(k)}$ и W_k сходятся к $\mathfrak{W}$ равномерно (в метрике Хаусдорфа).
2. Либо $\mathfrak{W}[t] = \varnothing$ и существует K, что $W^{(k)}[t] = \varnothing$, $W_k[t] = \varnothing$ для всех $k > K$, либо $W^{(k)}[t] \neq \varnothing$, $W_k[t] \neq \varnothing$ для всех натуральных k и $\mathfrak{W}[t] \neq \varnothing$.
3. Пусть $t \in [t_0, \vartheta_0]$ такого, что сечение $\mathfrak{W}[t] \neq \varnothing$. В этом случае имеет место равномерная сходимость $W^{(k)}[t]$ и $W_k[t]$ к $\mathfrak{W}[t]$.

$$E[t] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n | (t, x) \in E\}.$$

Экстремальное прицеливание на нестабильное множество

(t_*, x_*) – позиция, $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^N$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$.

Формирование управления первым игроком

Пусть x_i – положение системы в момент τ_i, $y_i^{(k)}$ – ближайший к x_i элемент $W^{(k)}$. Управление $u_i^{(k)}$ определяется по правилу:

$$\max_{v \in Q} < y_i^{(k)} - x_i, f(\tau_i, x_i, u_i^{(k)}, v) >=$$
$$= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} < y_i^{(k)} - x_i, f(\tau_i, x_i, u, v) > .$$

Движение

На отрезке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ движение определяется как решение уравнения:

$$x(t) = x_i + \int_{\tau_i}^{t} f(\xi, x(t), u_i^{(k)}, v[\xi]) d\xi.$$

$v[\cdot]$ – управление второго игрока.

Экстремальное прицеливание на нестабильное множество

Теорема

Пусть $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$, и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^N$ отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, удовлетворяющего условию

$$\max_{i=\overline{0,N-1}} (\tau_{i+1} - \tau_i) \leq \delta,$$

существует $J > 0$ со свойством: для любого $j > J$ и любого $x_* \in W^{(k)}[\tau_*]$ и некоторого $\theta \in [t_*, \vartheta_0]$

$$d(x[\theta], M[\theta]) \leq \varepsilon,$$

$x[\cdot]$ – пошаговое движение определяемое методом экстремального сдвига в моменты τ_i.

$d(x, A)$ – расстояние от точки x до множества $A \subset \mathbb{R}^n$.

Спасибо за внимание