РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи
УДК 517.977.8

Авербух Юрий Владимирович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СТРУКТУРЫ РЕШЕНИЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
чл.-корр. РАН Ченцов А.Г.

Екатеринбург – 2007

Содержание

Введение

Общая характеристика работы

Представленная диссертация посвящена изучению структурных свойств множества успешной разрешимости в игровых задачах наведения на множество внутри фазовых ограничений, а также изучению характера сходимости метода программных итераций в этих задачах.

Актуальность темы

Теория управления в настоящее время является разделом современной математики, связанным с оптимизацией динамических процессов, и находит многочисленные приложения. Основополагающее значение в этой теории имеет принцип максимума Л.С. Понтрягина. Задачи управления в условиях неопределенности формализуются в рамках теории дифференциальных игр. Такие задачи возникают при управлении техническими системами, осложненными действием помех. Содержательные постановки подобных задач отражены в монографии R.P. Isaacs [14]. Построение строгой теории задач конфликтного управления следует связать прежде всего с именами Н.Н. Красовского, Л.С. Понтрягина, Б.Н. Пшеничного и А.И. Субботина ([40], [132], [60], [61], [66], [65]). Следует отметить также работы W.H. Fleming и E. Roxin (см. [128], [137]).

Существенное влияние на теорию дифференциальных игр оказали работы А.В.Кряжимского, А.Б. Куржанского, Е.Ф. Мищенко, Ю.С. Осипова, Ф.Л. Черноусько, J.P. Aubin, T. Basar, P. Bernhard, J.V. Breakwell, L. Berkovitz, M.G. Crandall, R.J. Elliot, A. Friedman N.J. Kalton, G. Leitmann, J. Lin, P.L. Lions, C. Ryll-Nardzewski, P. Varaiya ([41]–[44], [62] – [64], [48], [55], [107], [113], [114], [120], [124], [125],[129], [133], [138]).

Большой вклад в теорию дифференциальных игр и ее приложения внесли Э.Г.Альбрехт, В.Д. Батухтин, С.А. Брыкалов, Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятников, М.И. Зеликин, А.Ф. Клейменов, А.А. Меликян, Н.Ю. Лукоянов, М.С. Никольский, В.В. Остапенко, В.С. Пацко, Н.Н. Петров, Л.А. Петросян, Е.С. Половинкин, Н.Н. Субботина, В.Е. Третьяков, А.М. Тарасьев, В.И. Ухоботов, В.Н. Ушаков, А.Г. Ченцов, А.А. Чикрий, С.В. Чистяков, M. Bardi, E.N. Barron, A. Blaquiere, I. Capuzzo Dolcetta, M. Falcone, L.C. Evans, R. Jensen, M. Ishii, J. Lewin, P. Soravia, P.E. Souganidis и многие другие ученые (см. [15], [17], [20], [21], [25], [26], [28] – [30], [59], [58], [68] – [69], [76] – [82], [85] – [100], [101] – [103], [109] – [112], [121] – [123], [126], [127], [134]).

Предлагаемая работа лежит в русле работ уральской школы Н.Н. Красовского. Рассматриваются дифференциальные игры, в которых задача одного из игроков (обычно называемого игроком-союзником или первым игроком) состоит в наведении движения системы на множество M, содержащееся в пространстве позиций, с соблюдением фазовых ограничений, определяемых множеством N; второй игрок старается помешать наведению. Наиболее удобной как с точки зрения теории, так и с точки зрения приложений представляется позиционная формализация Н.Н. Красовского. В рамках этой формализации была установлена фундаментальная теорема об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина (см. [40], [132]), которая утверждает существование решения вышеупомянутой дифференциальной игры в классе позиционных стратегий (из этой теоремы следует существование седловой точки в классе позиционных стратегий). Из работ

Н.Н. Красовского и А.И. Субботина следует, что вид разрешающей позиционной стратегии полностью определяется множеством успешной разрешимости задачи наведения (см. [40]). Таким образом, задача построения разрешающей позиционной стратегии сводится к задаче построения множества успешной разрешимости задачи наведения.

Заметим также, что множество успешной разрешимости задачи наведения в классе позиционных стратегий совпадает с множеством успешной разрешимости задачи наведения в классе квазистратегий первого игрока. Подход, основанный на использовании квазистратегий первого игрока, развит в работах E. Roxin [137], R.J. Elliot и N.J. Kalton [125], P. Varaiya и J. Lin [141], Н.Н. Красовского и А.Г. Ченцова [130],[131] и большом числе других работ. А.Г. Ченцов рассматривал дифференциальные игры в классе многозначных обобщенных квазистратегий (см. [90]). Им же рассматривались вопросы построения седловой точки в классе квазистратегий (см. [100]).

Конкретное построение множества успешной разрешимости задачи наведения при выполнении условий регулярности (см. [40], [32], [33]) удается реализовать на основе вспомогательных программных конструкций, т. е. средствами теории программного управления, восходящей к исследованиям Л.С. Понтрягина. В работах Н.Н. Красовского, А.Б. Куржанского, Ю.С. Осипова и их учеников была построена стройная теория программного управления, на базе которой позднее были разработаны эффективные методы решения регулярных дифференциальных игр (см. [31]–[33], [40]). В общем случае построение решения дифференциальной игры сводится к реализации последовательности решений игровых задач программного управления, благодаря методу программных итераций (МПИ), предложенному А.Г. Ченцовым. Рассматриваемый вариант метода программных итераций состоит в построении последовательности множеств, сходящейся к множеству успешной разрешимости (другая версия метода программных итераций реализует построение функции цены игры). В связи с исследованием дифференциальных игр методом программных итераций отметим также работы А.А. Меликяна [47], В.И. Ухоботова [78]–[80], С.В. Чистякова [102]–[104]. Близкие к методу программных итераций подходы рассматривались в работе P.M. Cardaliaguet, M. Quincampoix, P. Saint-Pierre [119]. Также А.Г. Ченцов построил “прямой” вариант метода программных итераций, благодаря которому решение строится в виде (неупреждающей) многозначной квазистратегии [93], [94], [96] – [99]. Оба построенных варианта метода программных итераций находятся в двойственности [95], [121], [122]. Аналоги метода программных итераций применялись А.И. Субботиным и А.Г. Ченцовым для построения обобщенного решения уравнения Гамильтона-Якоби (см. [73]). Отметим, что при решении реальных задач далеко не всегда удается аналитически построить по методу программных итераций последовательность множеств. Во многих задачах удается построить лишь конечное и очень небольшое число итераций.

Большой интерес представляют задачи исследования структуры решения игровых задач управления и установления эквивалентности решений различных дифференциальных игр. Представление решения дифференциальной игры сближения-уклонения как множества успешной разрешимости установлено благодаря теореме об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. Дальнейшие исследования структуры решения игровых задач управления связаны с работами Н.Н.Красовского, посвященными унификации дифференциальных игр [38], [39]. Следует отметить теорию стохастического программного синтеза, построенную в работах Н.Н. Красовского [34]. Структура решения игровых задач управления с информационной памятью исследована в работах А.И. Субботина [74], [75] (в связи с этим см. также [40]). Значительные результаты в области исследования геометрической структуры решения игровых задач наведения получены в работах А.Г. Ченцова, А.Г. Ченцова и В.Я. Рузакова [67], в которых исследовалась "устойчивость" мостов к операции объединения. Отметим также работы P.M. Cardaliguet, M. Quincampoix и P. Sent-Pierre (см. [117]–[119]).

В диссертации исследуется структура задач наведения на цилиндрическое множество (эти задачи также называются задачами наведения "к моменту"). Большое количество работ, посвященных этой задаче, использует вспомогательную задачу наведения на множество, содержащееся в гиперплоскости $t = \mathrm{const}$ (то есть задачу наведения "в момент"). Структура решения задачи наведения на множество "к моменту" в регулярном случае изучена в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина [40], [132]. На основе построения решения уравнения Гамильтона-Якоби с дополнительными ограничениями в виде неравенств А.И. Субботиным было получено решение задачи наведения "к моменту" в случае игры с простыми движениями [71]; для этой задачи им получено выражение функции цены, аналогичное выражению для функции цены в задаче наведения "в момент", полученной в работе Б.Н.Пшеничного и М.И.Сагайдак [66]. Вопросы построения решения задачи наведения на цилиндрическое множество рассматривались в работе I.M. Mitchel, A.M. Bayen, C.J. Tomlin [136]: решение задачи наведения на цилиндрическое множество в этой работе строилось как множество Лебега вязкостного решения вспомогательного уравнения типа Гамильтона-Якоби; построение решения использует преобразование исходной задачи к дифференциальной игре с фиксированным временем окончания. Подобная процедура используется и в настоящей диссертации.

Выделим также вопрос о реализуемости множества успешной разрешимости задачи наведения посредством метода программных итераций. В этой области в работах А.Г. Ченцова [72],[86], и В.И. Ухоботова [79], [80] получены результаты, касающиеся условий, при которых метод программных итераций стабилизируется после конечного и небольшого числа итераций. Как говорилось выше, обычно возможно построение лишь некоторого числа итераций. В связи с этим возникает вопрос о реализации метода экстремального сдвига на нестабильное множество. Случай, когда множество, на которое осуществляется прицеливание близко к множеству успешной разрешимости в инфинитезимальном смысле, рассматривался в статье В.Н. Ушакова и Я.А. Латушкина [82], где введено понятие дефекта стабильности.

В диссертации исследуются вопросы структуры решения дифференциальных игр, понимаемого как множество успешной разрешимости задачи наведения. Также рассматривается вопрос о характере сходимости метода программных итераций и построении позиционных стратегий, приближающих (в смысле гарантированного результата) оптимальную.

Цель работы

Исследование следующих свойств множества успешной разрешимости игровой задачи наведения: непрерывная зависимость сечений от времени, связность сечений; преобразование игровых задач наведения на цилиндрическое множество к задачам наведения на основание цилиндра; построение аналогов метода экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина с использованием прицеливания на нестабильное множество.

Методы исследования

В основе работы лежат методы теории управления и теории позиционных дифференциальных игр, скользящих режимов управления и конструкции метода программных итераций. Используются элементы общей топологии и теории меры.

Научная новизна

Построен пример дифференциальной игры, в которой сечения разрывно зависят от времени и являются несвязными (целевое множество при этом связно). Получены достаточные условия непрерывной зависимости сечений от времени и связности сечений. Предложен метод построения дифференциальной игры с заданным множеством успешной разрешимости. Рассмотрена задача наведения автономной конфликтно управляемой системы на цилиндрическое множество. Этой задаче сопоставлена задача наведения на основание цилиндра преобразованной системы. Доказано, что последовательности множеств, построенные по методу программных итераций для обеих задач, совпадают. Исследован характер сходимости метода программных итераций в случае компактного целевого множества. На этой основе построены аппроксимативные аналоги правила экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина и экстремального управления с поводырем. Результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Полученные в работе теоретические результаты дают представление о геометрической структуре множества успешной разрешимости в игровой задаче управления и о характере сходимости метода программных итераций. Предложенный в работе метод построения дифференциальной игры с заданным множеством успешной разрешимости задачи наведения позволяет исследовать структуру множества в нелинейной дифференциальной игре сближения-уклонения. Практическая ценность работы состоит в том, что полученные свойства могут быть применены при изучении различных методов решения задач игрового управления. В частности, решение игровой задачи наведения автономной конфликтно-управляемой системы на цилиндрическое множество при весьма общих предположениях может быть сведено к решению задачи наведения преобразованной системы на основание цилиндра, благодаря тому, что доказано совпадение последовательностей, построенные по методу программных итераций для обеих задач. Упомянутое свойство совпадения последовательностей может быть использовано при построении управления в задачах уклонения от множества, в которых ограничено число переключений управления одного из игроков. Построены аппроксимативные аналоги правила экстремального сдвига, для реализации которых не требуется построение множества успешной разрешимости, а достаточно построения некоторого приближения к нему.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на международном семинаре “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби” (Екатеринбург, 22–26 июня 2005 года), международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 10–15 июля 2006 года), IX съезде по теоретической и прикладной механике (Нижний Новгород, 22–28 августа 2006 года), международной конференции “Моделирование и исследование устойчивости динамических систем” (Киев, 22-25 мая 2007 года), международной конференции по математической теории управления и механике (Суздаль, 22–27 июня 2007 года), Symposium on Functional Differential Equations (September, 11–15, Ariel, Israel), межрегиональной конференции “Современные математические методы и информационные технологии в образовании” (Тюмень, 14–15 апреля, 2005); семинарах отдела управляемых систем и отдела динамических систем ИММ УрО РАН, семинаре кафедры диференциальных уравнений Удмуртского государственного университета, семинаре отдела оптимизации управляемых процессов Института кибернетики им.

В.М. Глушкова НАН Украины.

Публикации

Основной материал диссертации опубликован в работах [1]–[12], [108]. В совместных с А.Г. Ченцовым работах [2]–[6], [108] А.Г. Ченцову принадлежат постановки задач и некоторые идеи доказательств.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, 3 глав и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Нумерация глав, параграфов и утверждений сквозная. Нумерация формул тройная. Объем работы 118 страниц, библиография содержит 141 наименований.

Основное содержание работы

Первая глава состоит из трех параграфов. Она является вводной и посвящена основным постановкам и методам, связанным с применением обобщенных управлений в динамических системах, теории дифференциальных игр и метода программных итераций.

В параграфе 1.1 введены основные понятия теории обобщенных управлений для случая конфликтно-управляемых систем. Изложение следует работам А.Г. Ченцова (см. [86]), в которых в качестве обобщенных управлений используются стратегические меры.

В параграфе 1.2 описана формализация движений, предложенная в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. На основе книг [40], [71], [132] и ряда других работ изложены основные результаты теории дифференциальных игр.

В параграфе 1.3 изложены основные идеи и варианты метода программных итераций, предложенного А.Г. Ченцовым. Подробно рассмотрены различные версии метода программных итераций для игровой задачи наведения.

Вторая глава состоит из четырех параграфов. Она посвящена вопросам структуры решения дифференциальной игры сближения-уклонения. Благодаря теореме об альтернативе Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, в качестве решения рассматривается множество успешной разрешимости задачи первого игрока (задачи наведения).

В параграфе 2.1 приведен пример дифференциальной игры, в которой множество успешной разрешимости задачи первого игрока является нерегулярным в следующем смысле: сечения этого множества разрывно зависят от времени и являются несвязными, хотя целевое множество является связным. В построенном примере функция, описывающая динамику системы, строится так, что множество успешной разрешимости в рассматриваемой дифференциальной игре совпадает с заданным априори.

В параграфе 2.2 метод, использовавшийся при построении примера, обобщен, и предложен способ построения дифференциальной игры с заданным множеством успешной разрешимости. При построении предполагается, что заданное множество вложено в некоторую гиперплоскость, и выполнено следующее условие: существует константа K такая, что для каждой позиции (t, x), принадлежащей этому множеству, существует позиция (θ, y), лежащая в целевом множестве, для которой $\|x-y\| \leq K|\theta-t|$, и для всех $\tau \in [t, \theta]$ существует точка z со свойствами: позиция (τ, z) лежит в заданном множестве, и $\|z-x\| \leq K|\tau-t|$.

В параграфе 2.3 приведены достаточные условия того, что сечения множества успешной разрешимости задачи первого игрока в нелинейной дифференциальной игре непрерывно зависят от времени и являются связными в случае связного целевого множества. Условие сформулировано в терминах существования функции, ограничивающей гамильтониан в данном направлении: требуется, чтобы существовала непрерывная, удовлетворяющая условиям локальной липшицевости и подлинейного роста по второй переменной, функция $z(t,x)$ такая, что для всех позиций (t,x), удовлетворяющих фазовым ограничениям, выполнено неравенство $H(t,x,s) \leq \langle z(t,x), s\rangle$ для всех $s \in \mathbb{R}^n$ (здесь H – гамильтониан рассматриваемой игры). Приведены конкретизации этого условия.

Параграф 2.4 посвящен изучению структуры задачи наведения на множество "к моменту". Предполагается, что рассматриваемая управляемая система является автономной. Этой задаче наведения "к моменту" для исходной игры сопоставляется задаче наведения "в момент" для системы, в которой возможности первого игрока расширены. Показано, что последовательности, построенные по методу итераций стабильности (один из вариантов метода программных итераций), в обеих задачах совпадают, также совпадают множества успешной разрешимости соответствующих задач первого игрока. Из этого утверждения следует, что для задачи наведения "к моменту" автономной конфликтно-управляемой системы выполнено следующее свойство: сечения множества успешной разрешимости непрерывно зависят от времени и являются связными множествами в случае связности целевого множества. В случае, когда исходная система удовлетворяет условию седловой точки в маленькой игре, преобразованная система также удовлетворяет этому условию.

Третья глава состоит из трех параграфов. Она посвящена изучению сходимости метода программных итераций и построению аппроксимативных аналогов метода экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. В этой главе рассматривается случай компактного целевого множества.

В параграфе 3.1 изучается характер сходимости метода программных итераций. Результаты этого параграфа изложены в совместных с А.Г. Ченцовым работах [2]–[3], [108].

Основным результатом параграфа 3.1 является утверждение о сходимости последовательности, построенной по методу программных итераций к множеству успешной разрешимости задачи первого игрока в метрике Хаусдорфа. Также показано, что в метрике Хаусдорфа сходятся последовательности сечений множеств, построенных по методу программных итераций, к соответствующему сечению множества успешной разрешимости задачи первого игрока в случае его непустоты.

Параграф 3.2 посвящен изучению аппроксимационных аналогов правила экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. Прицеливание осуществляется на множества, построенные по методу программных итераций. Рассматривается следующая схема: по заданному ε выбирается δ, после этого по любому разбиению отрезка управления находится номер K и рассматривается управление первого игрока, полученное методом экстремального сдвига на множество, принадлежащее последовательности, построенной по методу программных итераций, с номером, большим K, в моменты, определяемые разбиением. Показано, что данная схема обеспечивает при достаточно малом δ приведение системы в ε-окрестность целевого множества при любых действиях второго игрока.

В параграфе 3.3 рассматривается аппроксимативная схема, аналогичная управлению по принципу экстремального управления с поводырем. Также, как в предыдущем случае, в качестве приближения к множеству успешной разрешимости задачи первого игрока выбраны множества, принадлежащие к последовательности построенной по методу программных итераций. Рассматривается следующая схема построения поводыря и управления первого игрока. Поводырь, стартуя из позиции, принадлежащей множеству с номером $k+1$, не выходит из множества с номером k (такое движение существует в силу соответствующего определения метода программных итераций). В момент прицеливания за новое положение поводыря принимается “ближайшая” к текущей позиция в множестве с номером $k+1$. В каждый момент прицеливания выбирается управление, экстремальное к новому положению поводыря. Показано, что по заданному ε можно подобрать такое δ, что для каждого разбиения отрезка управления существует номер K со свойством: всякое движение, определяемое управлением первого игрока, построенное по аппроксимативной схеме управления с поводырем для множеств с номерами k, $k+1$, при $k > K$, приходит в ε-окрестность целевого множества.

Глава 1

Определения и обозначения

1.1 Элементы теории обобщенных управлений

1.1.1 Множества в фазовом пространстве и пространстве позиций

Мы будем рассматривать в настоящей работе два конечномерных пространства: фазовое пространство $\mathbb{R}^n$ и пространство позиций $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. В пространстве позиций считаются заданными два множества: целевое множество и множество, описывающее фазовые ограничения. Рассматриваемые в настоящей работе игровые задачи содержательно состоят в том, что один из игроков стремится привести динамическую систему на целевое множество, соблюдая фазовые ограничения, а второй стремится не допустить этого.

В фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ определено скалярное произведение двух элементов, которые мы будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Порожденную этим произведением норму обозначаем через $\| \cdot \|$. В случае, когда рассматриваются одновременно фазовые пространства разных размерностей, евклидову метрику будем снабжать нижним индексом с указанием размерности. Расстояние от x до замкнутого множества в фазовом пространстве $C \subset \mathbb{R}^n$

определяется формулой

$$d(x, C) \triangleq \min_{y \in C} \|x - y\|.$$

На семействе всех непустых компактных подмножеств $\mathbb{R}^n$ введем метрику Хаусдорфа $\mathbf{h}$ по стандартному правилу: если C_1 и C_2 – непустые компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, то значение метрики Хаусдорфа $\mathbf{h}$ определим как

$$\mathbf{h}(C_1, C_2) \triangleq \sup\{\max_{x \in C_1} d(x, C_2); \max_{x \in C_2} d(x, C_1)\}. \tag{1.1.1}$$

Для двух позиций (t_1, x_1) и (t_2, x_2) определим расстояние

$$\rho((t_1, x_1), (t_2, x_2)) \triangleq \sup\{|t_1 - t_2|, \|x_1 - x_2\|\}.$$

Если (t, x) – некоторая позиция, $D \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, D замкнуто, определим расстояние от позиции (t, x) до множества D по формуле:

$$\mathbf{d}((t, x), D) \triangleq \min\{\rho((t, x), (\tau, y)) : (\tau, y) \in D\}.$$

Также на семействе всех непустых компактных подмножеств $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ введем метрику Хаусдорфа $\mathbf{H}$: если D_1, D_2 непустые компакты в $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, то

$$\mathbf{H}(D_1, D_2) \triangleq \sup\{\max_{(t,x) \in D_1} \mathbf{d}((t, x), D_2); \max_{(t,x) \in D_2} \mathbf{d}((t, x), D_1)\}. \tag{1.1.2}$$

Если $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, то через $E[t_*]$ будем обозначать сечение множества E гиперплоскостью $t = t_*$:

$$E[t_*] \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : (t_*, x) \in E\}. \tag{1.1.3}$$

Определение 1. Будем говорить, что множество $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ *не возрастает по сечениям*, если для всех $t_*, t^* \in [t_0, \vartheta_0]$, $t^* \geq t_*$, $E[t^*] \subset E[t_*]$.

Также нам потребуются следующие обозначения. Пусть C – некоторое непустое компактное множество в метрическом пространстве, $f : C \to \mathbb{R}$,

f – непрерывна. Тогда функция $f(x)$ достигает на C своего минимума и максимума. Через $\mathrm{Argmin}\{f(x) : x \in C\}$ будем обозначать множество элементов, на которых достигается минимум функции f на множестве C. Аналогично $\mathrm{Argmax}\{f(x) : x \in C\}$ определяется как множество максимизирующих элементов.

Если C – некоторое множество, то через $\mathcal{P}'(C)$ обозначаем семейство всех непустых подмножеств C; если C содержится в некотором метрическом пространстве через $\mathcal{F}(C)$ обозначаем семейство всех замкнутых подмножеств C; сама метрика, относительно которой рассматривается топология, будет уточняться в каждом конкретном случае, при этом какая-либо двусмысленность снимается соответствующими пояснениями.

1.1.2 Стратегические меры

Мы предполагаем, что заданы два непустых компакта в конечномерных арифметических пространствах $P \subset \mathbb{R}^p$ и $Q \subset \mathbb{R}^q$. С точки зрения рассматриваемых игр: P – множество допустимых управлений первого игрока, Q – множество допустимых управлений второго игрока.

Следуя [72], [90] в качестве обобщенных управлений мы используем меры-управления. Такой подход вполне аналогичен использованию мерозрачных функций [23], [24].

Пусть E – множество, $\mathfrak{E}$ – σ-алгебра подмножеств E. Обозначим через $(\sigma - \mathrm{add})[\mathfrak{E}]$ множество всех вещественнозначных мер на $\mathfrak{E}$, через $(\sigma - \mathrm{add})_+[\mathfrak{E}]$ – конус всех неотрицательных вещественнозначных мер на $\mathfrak{E}$. Если на E введена топология $\mathfrak{t}$, то обозначим через $C(E, \mathfrak{t})$ множество всех непрерывных в смысле топологии $\mathfrak{t}$ функций из E в $\mathbb{R}$. Если E является подмножеством $\mathbb{R}^l$ для некоторого l, а в качестве $\mathfrak{t}$ рассматривается топология покоординатной сходимости, то множество всех непрерывных функций из E в $\mathbb{R}$ обозначим через $C(E)$. В дальнейшем мы будем рассматривать меры на подмножествах арифметического конечномерного пространства, считая, что $\mathfrak{E}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств E. Эта σ-алгебра строится следующим способом. Рассмотрим множество всех открытых множеств в E. Семейство открытых множеств является π-системой, то есть замкнуто относительно конечных пересечений (определение π-систем дано в [22]); σ-алгебра борелевских подмножеств множества $\mathfrak{E}$ есть наименьшая σ-алгебра, содержащая семейство всех открытых множеств. Рассматриваемая σ-алгебра $\mathfrak{E}$ может быть порождена семейством всех замкнутых множеств E, которое также является π-системой.

Заметим, что любая полуалгебра является π-системой. Отметим еще один результат, касающийся π-систем [22]: пусть E некоторое множество, пусть, также, $\mathfrak{F}$ – некоторая π-система подмножеств E, $\mathfrak{D}$ – наименьшая σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{F}$, $\mu_1, \mu_2 \in (\sigma - \mathrm{add})(\mathfrak{D})$, тогда для совпадения μ_1 и μ_2 на $\mathfrak{D}$ необходимо и достаточно чтобы μ_1 и μ_2 совпадали на $\mathfrak{F}$.

Пусть, $\mathfrak{E}$ – борелевская σ-алгебра множеств, $F \in \mathfrak{E}$. Через $\mathbf{1}_F(\cdot)$ обозначим характеристическую функцию множества F:

$$\mathbf{1}_F(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x \in F \\ 0, & x \notin F. \end{cases}$$

Если F – замкнутое множество, то существует последовательность непрерывных функций, сходящаяся поточечно к $\mathbf{1}_F(\cdot)$ [18, теорема 1.2].

Все меры на σ-алгебре борелевских подмножеств метрического пространства являются регулярными [18, теорема 1.1]. На пространстве мер $(\sigma - \mathrm{add})[\mathfrak{E}]$ вводится слабая сходимость (точнее ее называть $*$-слабой сходимостью): будем говорить, что последовательность мер $\{\mu_i\}_{i=1}^{\infty}$ слабо сходится к мере μ, если для всех $f(\cdot) \in C(E)$

$$\int_E f(x)\mu_i(dx) \to \int_E f(x)\mu(dx), \ i \to \infty.$$

Отметим, что если все меры μ_i положительны, то и мера μ положительна, если все меры μ_i являются вероятностными, то и мера μ является вероятностной. Поскольку пространство $C(E)$ сепарабельно, на пространстве всех мер Радона определено понятие слабой нормы [23, стр. 53]. А именно, если $\{c_j(\cdot)\}$ – всюду плотная счетная система функций, то слабой нормой меры μ называется

$$\|\mu\|_w \triangleq \sum_j \frac{\left|\int_E c_j(x)\mu(dx)\right|}{1+\|c_j(\cdot)\|_s},$$

где $\|\cdot\|_s$ – sup-норма в $C(E)$. Отметим, что слабая сходимость и сходимость по слабой норме эквивалентны.

В дальнейшем σ-алгебры борелевских подмножеств множеств P, Q и $P\times Q$ будем обозначать через Σ_P, Σ_Q, $\Sigma_{P\times Q}$ соответственно. Следуя [86], [72], введем при $t\in[t_0,\vartheta_0]$ компакты

$$Y_t \triangleq [t,\vartheta_0]\times P,\ Z_t \triangleq [t,\vartheta_0]\times Q,\ \Omega_t \triangleq [t,\vartheta_0]\times P\times Q, \tag{1.1.4}$$

оснащаемые σ-алгебрами $\mathcal{K}_t$, $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{C}_t$ борелевских подмножеств соответственно. При этом, конечно, множества-произведения в (1.1.4) оснащаются обычными топологиями покоординатной сходимости, а упомянутые σ-алгебры порождены этими топологиями [50]. Отметим, что топология покоординатной сходимости метризуема. Кроме того, при $t\in[t_0,\vartheta_0]$ вводим σ-алгебру $\mathcal{T}_t$ борелевских подмножеств отрезка $[t,\vartheta_0]$. Заметим, что семейства множеств

$$\{\Gamma\times\Lambda_P : \Gamma\in\mathcal{T}_t, \Lambda_P\in\Sigma_P\},$$

$$\{\Gamma\times\Lambda_Q : \Gamma\in\mathcal{T}_t, \Lambda_Q\in\Sigma_Q\} \text{ и}$$

$$\{\Gamma\times\Lambda_{P\times Q} : \Gamma\in\mathcal{T}_t, \Lambda_{P\times Q}\in\Sigma_{P\times Q}\}$$

являются полуалгебрами и порождают σ-алгебры $\mathcal{K}_t$, $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{C}_t$ соответственно (то есть σ-алгебры $\mathcal{K}_t$, $\mathcal{D}_t$ и $\mathcal{C}_t$ являются наименьшими σ-алгебрами, содержащими семейства $\{\Gamma \times \Lambda_P : \Gamma \in \mathcal{T}_t,\ \Lambda_P \in \Sigma_P\}$, $\{\Gamma \times \Lambda_Q : \Gamma \in \mathcal{T}_t,\ \Lambda_Q \in \Sigma_Q\}$ и $\{\Gamma \times \Lambda_{P\times Q} : \Gamma \in \mathcal{T}_t,\ \Lambda_{P\times Q} \in \Sigma_{P\times Q}\}$ соответственно). Также σ-алгебра $\mathcal{C}_t$ может быть порождена семейством $\{\Gamma \times \Lambda_P \times \Lambda_Q : \Gamma \in \mathcal{T}_t, \Lambda_P \in \Sigma_P, \Lambda_Q \in \Sigma_Q\}$.

Обозначим через λ меру Лебега на σ-алгебре борелевских подмножеств $\mathbb{R}$ [50], через λ_t ограничение этой меры на $\mathcal{T}_t$.

Введем следующие множества:

$$\mathcal{R}_t \triangleq \{\mu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{K}_t] : \mu(\Gamma \times P) = \lambda_t(\Gamma)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{E}_t \triangleq \{\nu \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{D}_t] : \nu(\Gamma \times Q) = \lambda_t(\Gamma)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\},$$

$$\mathcal{H}_t \triangleq \{\eta \in (\sigma - \mathrm{add})_+[\mathcal{C}_t] : \eta(\Gamma \times P \times Q) = \lambda_t(\Gamma)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\}.$$

Элементы введенных множеств $\mathcal{R}_t$, $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{H}_t$ называются стратегическими мерами. С точки зрения рассматриваемой дифференциальной игры меры $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$ являются аналогами обычных управлений $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$, меры $\eta \in \mathcal{H}_t$ – аналогами пар управлений $(u(\cdot), v(\cdot))$.

Отметим, что по теореме Алаоглу [23] множества $\mathcal{R}_t$, $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{H}_t$ являются метризуемыми компактами в слабой топологии. Также, как следует из [18, теорема 1.1] все меры, элементы множеств $\mathcal{R}_t$, $\mathcal{E}_t$ и $\mathcal{H}_t$, являются регулярными.

Заметим, что обычные управления могут быть вложены в пространства стратегических мер. В самом деле пусть $u_*(\cdot) : [t, \vartheta_0] \to P$, $v_*(\cdot) : [t, \vartheta_0] \to Q$ – измеримые функции. Определим следующие меры $\mu_{u_*(\cdot)} \in \mathcal{R}_t$, $\nu_{v_*(\cdot)} \in \mathcal{E}_t$, $\eta_{u_*(\cdot), v_*(\cdot)} \in \mathcal{H}_t$ следующим образом:

$$\mu_{u_*(\cdot)}(\Gamma \times \Lambda_P) \triangleq \int_\Gamma \mathbf{1}_{\Lambda_P}(u_*(t))\lambda(dt)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\ \forall \Lambda_P \in \Sigma_P;$$

$$\nu_{v_*(\cdot)}(\Gamma \times \Lambda_Q) \triangleq \int_\Gamma \mathbf{1}_{\Lambda_Q}(v_*(t))\lambda(dt)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\ \forall \Lambda_Q \in \Sigma_Q;$$

$$\eta_{u_*(\cdot),v_*(\cdot)}(\Gamma \times \Lambda_{P\times Q}) \triangleq$$
$$\triangleq \int_\Gamma \mathbf{1}_{\Lambda_{P\times Q}}((u_*(t), v_*(t)))\lambda(dt)\ \forall \Gamma \in \mathcal{T}_t\ \forall \Lambda_{P\times Q} \in \Sigma_{P\times Q}.$$

Из свойств характеристической функции следует, что определенные таким образом вещественнозначные функции $\mu_{u_*(\cdot)}$, $\nu_{u_*(\cdot)}$ и $\eta_{u_*(\cdot),v_*(\cdot)}$ являются мерами на полуалгебрах $\{\Gamma \times \Lambda_P : \Gamma \in \mathcal{T}_t, \Lambda_P \in \Sigma_P\}$, $\{\Gamma \times \Lambda_Q : \Gamma \in \mathcal{T}_t, \Lambda_P \in \Sigma_Q\}$ и $\{\Gamma \times \Lambda_{P\times Q} : \Gamma \in \mathcal{T}_t, \Lambda_{P\times Q} \in \Sigma_P\}$ соответственно. Эти меры могут быть единственным способом продлены на σ-алгебры $\mathcal{R}_t$, $\mathcal{E}_t$ и $\mathcal{H}_t$ соответственно.

Для всех $t \in [t_0, \vartheta_0]$ и $\nu \in \mathcal{E}_t$ введем множество мер из $\mathcal{H}_t$, согласованных с ν:

$$\Pi_t[\nu] \triangleq \{\eta \in \mathcal{H}_t : \eta(D \boxtimes P) = \nu(D)\ \forall D \in \mathcal{D}_t\}. \tag{1.1.5}$$

Здесь

$$D \boxtimes P \triangleq \{(\xi, u, v) : u \in P, (\xi, v) \in D\}\ \forall D \in \mathcal{D}_t.$$

Для каждой меры $\mu \in \mathcal{R}_t$ и элемента $v_* \in Q$ обозначим через $\mu \odot v_*$ меру из $\mathcal{H}_t$, определенную по правилу

$$(\mu \odot v_*)(C) \triangleq \mu(\{(\xi, u) \in [t_0, t] \times P : (\xi, u, v_*) \in C\}).$$

Тогда для каждого $t \in [t_0, \vartheta_0]$ любая мера $\eta \in \Pi_t[\nu_{v_*}]$ представима в виде

$$\eta = \mu \odot v_*.$$

В самом деле, по данной мере η определим меру на измеримом пространстве $(Y_t, \mathcal{K}_t)$

$$\mu(K) \triangleq \eta(K \times \{v_*\})\ \forall K \in \mathcal{K}_t.$$

Докажем, что $\mu \odot v_* = \eta$. Для любого множества $C \in \mathcal{C}_t$

$$\eta(C) = \eta(C \cap \{v_*\}) + \eta(C \setminus \{v_*\}).$$

Пусть C – открытое множество. Рассмотрим $\eta(C \setminus \{v_*\})$. Обозначим

$$\Gamma \triangleq \{\xi \in [t_0, t] : \exists u \in P \exists v \in Q : \ (\xi, u, v) \in C\}.$$

Заметим, что Γ – множество открытое в $\mathbb{R}$. Следовательно, Γ измеримо. Тогда,

$$\eta(C \setminus \{v_*\}) \leq \eta(\Gamma \times P \times (Q \setminus \{v_*\})).$$

Поскольку $\eta \in \Pi_t[\nu_{v_*}]$, имеем

$$\eta(\Gamma \times P \times (Q \setminus \{v_*\})) = 0.$$

Положим

$$K \triangleq \{(\xi, u) \in [t_0, t] \times P : (t, u, v_*) \in C \cap \{v_*\}\} = \\ = \{(\xi, u) \in [t_0, t] \times P : (\xi, u, v_*) \in C\}.$$

Тогда $C \cap \{v_*\} = K \times \{v_*\}$. Следовательно,

$$\eta(C) = \eta(C \cap \{v_*\}) = \eta(K \times \{v_*\}) = \mu(K) = (\mu \odot v_*)(C).$$

Поскольку меры η и $\mu \odot v_*$ совпадают на семействе всех открытых подмножеств множества Ω_t, они совпадают на всей σ-алгебре $\mathcal{H}_t$.

1.1.3 Слабо измеримые вероятностнозначные функции

Другой подход, вполне аналогичный использованию стратегических мер, основан на использовании слабо измеримых мерозначных функций [23], [24]. В настоящем разделе мы покажем, что пространство стратегических мер изоморфно пространству слабо измеримых вероятностнозначных функций.

На σ-алгебрах Σ_P, Σ_Q, $\Sigma_{P\times Q}$ рассмотрим множества всех регулярных вероятностных мер (вероятностных мер Радона), обозначим через $\mathfrak{R}_P$, $\mathfrak{R}_Q$ и $\mathfrak{R}_{P\times Q}$. Как говорилось выше, пространство всех мер Радона оснащается слабой нормой. Согласно теореме IV.1.4 [23] пространство всех мер Радона, сепарабельно и полно, а пространство вероятностных мер Радона со слабой нормой компактно. Рассмотрим пространства всех вероятностнозначных, слабо измеримых функций из $[t, \vartheta_0]$ в $\mathfrak{R}_P$, $\mathfrak{R}_Q$, $\mathfrak{R}_{P\times Q}$ соответственно. Будем говорить, что две функции совпадают почти всюду, если они различаются на множестве, вложенном во множество меры 0. Будем считать две функции эквивалентными, если они совпадают почти всюду. В дальнейшем будем рассматривать классы эквивалентных вероятностнозначных функций, не отличая пространство всех функций и пространство классов эквивалентных функций. Покажем, что рассматриваемые пространства классов функций изоморфны пространствам $\mathcal{R}_t$, $\mathcal{E}_t$, $\mathcal{H}_t$ соответственно. Поскольку доказательства для трех случаев аналогичны, мы рассмотрим случай функций из $[t, \vartheta_0]$ в $\mathfrak{R}_P$.

Изложим основные понятия теории слабо измеримых вероятностнозначных функций, следуя [23]. Понятие слабой измеримости может быть определено при помощи интегрируемости функции от меры. Пусть L_t – множество всех функций $\beta(\cdot) : [t, \vartheta_0] \to C(P)$ таких, что $\|\beta(\cdot)\|_s$ интегрируема.

Также как в случае мерозначных функций мы рассмотрим классы эквивалентных функций, считая, что две функции из $\mathbf{L}_t$ эквивалентны, если они совпадают почти всюду, то есть различаются на множестве, вложенном во множество лебеговской меры 0. И также как в случае мерозначных функций будем отождествлять множество $\mathbf{L}_t$ с пространством классов эквивалентных функций. На $\mathbf{L}_t$ определяется норма $\|\cdot\|_l$. Если $\beta(\cdot) \in \mathbf{L}_t$, то

$$\|\beta(\cdot)\|_l \triangleq \int_t^{\vartheta_0} \|\beta(\xi)\|_s d\xi.$$

Пространство $(\mathbf{L}_t, \|\cdot\|_l)$ является банаховым [23].

Функция $\beta(\cdot)$ называется простой, если для всех $\xi \in [t, \vartheta_0]$ существуют конечное число множеств $\Gamma_j \in \mathcal{T}_t$ и функции $c_j(\cdot) \in C(P)$ такие, что $\Gamma_{j_1} \cap \Gamma_{j_2} = \varnothing$ для $j_1 \neq j_2$ и

$$\beta(\xi)(\cdot) = \sum_j \mathbf{1}_{\Gamma_j}(\xi) c_j(\cdot),$$

здесь $\mathbf{1}_\Gamma(\cdot)$ – характеристическая функция множества Γ. Для каждой функции $\beta(\cdot) \in \mathbf{L}_t$ существует последовательность простых функций $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty$, что

$$\|\beta(\cdot) - \beta_i(\cdot)\|_l \to 0.$$

Для $\tilde{\mu}(\cdot) : [t, \vartheta_0] \to \mathfrak{R}_P$ (также как для случая, когда $\tilde{\mu}(t)$ принимает значения в множестве всех мер Радона), определим, следуя [23], при $\xi \in [t, \vartheta_0]$

$$\beta(\xi, \tilde{\mu}(\xi)) \triangleq \int_P \beta(\xi, u) \tilde{\mu}(\xi)(du).$$

Мерозначная функция $\tilde{\mu}(\cdot)$ является слабо измеримой тогда и только тогда, когда для каждой функции $\beta(\cdot) \in \mathbf{L}_t$, функция $\beta(\cdot, \tilde{\mu}(\cdot))$ является интегрируемой [23].

Изоморфизм пространств будем понимать в следующем смысле: пусть $\mu \in \mathcal{R}_t$ и $\tilde{\mu} : [t, \vartheta_0] \to \mathfrak{R}_P$ слабо измерима, будем говорить, μ и $\tilde{\mu}(\cdot)$ эквивалентны, если для всех $\gamma(\cdot, \cdot) \in C([t, \vartheta_0] \times P)$ выполнено

$$\int_{[t,\vartheta_0] \times P} \gamma(\xi, u) \mu(d(\xi, u)) = \int_t^{\vartheta_0} \int_P \gamma(\xi, u) \tilde{\mu}(\xi)(du) d\xi. \tag{1.1.6}$$

Также понятие слабо измеримых вероятностнозначных функций может быть описано в терминах условных регулярных вероятностей [84]. Мы рассмотрим условные регулярные вероятности на произведении σ-алгебр $\mathcal{T}_t$ и

Σ_P. Функция $w(\cdot,\cdot):[t,\vartheta_0]\times\Sigma_P\to[0,1]$ называется регулярной условной вероятностью (в терминах [84]), если при фиксированном Λ_P функция $w(\cdot,\Lambda_P)$ является измеримой относительно σ-алгебры $\mathcal{T}_t$, а при фиксированном t $w(\xi,\cdot)$ – вероятность на Σ_P. В рассматриваемом случае мы будем отождествлять две условные вероятности $w_1(\cdot,\cdot)$ и $w_2(\cdot,\cdot)$, если для каждого множества $\Lambda_P\in\Sigma_P$ множество $\{\xi : w_1(\xi,\Lambda_P)\neq w_2(\xi,\Lambda_P)\}$ вложено во множество меры 0. Заметим, что если $\tilde{\mu}(\cdot):[t,\vartheta_0]\to\mathfrak{R}_P$ – слабо измеримая функция, то функция $w(\xi,\Lambda_P)\triangleq\tilde{\mu}(\xi)(\Lambda_P)$ – условная регулярная вероятность. Аналогично, любая условная регулярная вероятность определяет слабо измеримую вероятностнозначную функцию.

Теперь определим вложение из пространства всех слабо измеримых вероятностнозначных функций во множество стратегических мер следующим образом. Пусть $\tilde{\mu}(\cdot)$ – вероятностнозначная слабо измеримая функция. Пусть $\beta(\cdot)\in\mathbf{L}_t$. Рассмотрим функционал $\mathbf{f}$:

$$\mathbf{f}(\beta(\cdot))\triangleq\int_t^{\vartheta_0}\beta(\xi,\tilde{\mu}(\xi))d\xi=\int_t^{\vartheta_0}\int_P\beta(\xi)(u)\tilde{\mu}(\xi)(u)d\xi.$$

Если $\gamma(\cdot,\cdot)\in C([t,\vartheta_0]\times P)$, то мы можем рассмотреть γ как элемент $\mathbf{L}_t$. Тогда функционал $\mathbf{f}$ определен на $C([t,\vartheta_0]\times P)$. При этом сужение функционала $\mathbf{f}$ на $C([t,\vartheta_0]\times P)$ является непрерывным функционалом. Тогда по теореме Рисса существует регулярная мера μ на $([t,\vartheta_0]\times P,\mathcal{T}_t\times\Sigma_P)$ такая, что

$$\int_t^{\vartheta_0}\int_P\gamma(\xi,u)\tilde{\mu}(u)d\xi=\int_{[t,\vartheta_0]\times P}\gamma(\xi,u)\mu(d(\xi,u))$$

для всякого $\gamma(\cdot,\cdot)\in C([t,\vartheta_0]\times P)$.

Докажем, что $\mu\in\mathcal{R}_t$. Пусть $\Gamma\in\mathcal{T}_t$ замкнуто. Тогда существует последовательность функций $\{b_i(\cdot)\}_{i=1}^\infty\in C([t,\vartheta_0])$ таких, что $b_i(\cdot)\to\mathbf{1}_\Gamma(\cdot)$, $i\to\infty$ поточечно. Поскольку функции $b_i^*(\cdot,\cdot):[t,\vartheta_0]\times P\to\mathbb{R}$, определенные по правилу

$$b_i^*(\xi, u) \triangleq b_i(\xi) \ \forall \xi \in [t, \vartheta_0] \ \forall u \in P,$$

непрерывны ($i \in \mathbb{N}$), имеем, что

$$\mu(\Gamma \times P) = \int_{\Gamma \times P} \mu(d(\xi, u)) = \lim_{i \to \infty} \int_{[t,\vartheta_0] \times P} b_i(\xi) \mu(d(t, u)) =$$
$$= \lim_{i \to \infty} \int_t^{\vartheta_0} b_i(\xi) \int_P \mu(\xi)(du) d\xi = \lim_{i \to \infty} \int b_i(\xi) = \lambda(\Gamma).$$

Теперь рассмотрим $\mu^*(\cdot) : \mathcal{T}_t \to \mathbb{R}$, вводимую по правилу:

$$\mu^*(\Gamma) \triangleq \mu(\Gamma \times P).$$

Имеем, что μ^* есть мера на $\mathcal{T}_t$. Поскольку для всех замкнутых множеств $\Gamma \subset [t, \vartheta_0]$ $\mu^*(\Gamma) = \lambda(\Gamma)$, то $\mu^*(\Gamma) = \lambda(\Gamma)$ для всех $\Gamma \in \mathcal{T}_t$. Следовательно, $\mu \in \mathcal{R}_t$.

Обратимся теперь к обратному вложению. Пусть $\mu \in \mathcal{R}_t$, определим слабо измеримую функцию $\tilde{\mu}(\cdot) : [t, \vartheta_0] \to \mathfrak{R}_P$ так чтобы для всех $\gamma(\cdot, \cdot) \in C([t, \vartheta_0] \times P)$ было выполнено равенство (1.1.6).

В самом деле для каждой меры на $\mu \in \mathcal{R}_t$ согласно [84, теорема 21.3] существует условная регулярная вероятность $w(\cdot, \cdot)$, что для каждой функции $g(\cdot, \cdot)$ измеримой относительно $\mathcal{K}_t$ верно равенство

$$\int_{[t,\vartheta_0] \times \mathcal{P}} g(t, u) \mu(d(t, u)) = \int_t^{\vartheta_0} \int_P g(t, u) w(\xi, du) s\xi. \tag{1.1.7}$$

Также заметим, что каждая условная регулярная вероятность определяет слабо измеримую вероятностнозначную функцию.

Из построенного соответствия, в частности, следует, что множество обычных управлений плотно во множестве обобщенных управлений. Мы рассмотрим только плотность управлений $\mu_{u(\cdot)}$ в $\mathcal{R}_t$. В самом деле вероятностнозначные функции вида $t \mapsto \delta_{u(t)}$ плотны во множестве всех слабо измеримых функций из $[t,\vartheta_0]\to\mathfrak{R}_P$ (здесь δ_u обозначает меру Дирака, сосредоточенную в u) [23]. Поскольку вероятностнозначной функции $t\mapsto\delta_{u(t)}$ соответствует стратегическая мера $\mu_{u(\cdot)}$ имеем, что множество всех стратегических мер вида $\mu_{u(\cdot)}$ плотно в $\mathcal{R}_t$. Отметим, что этот факт может быть доказан независимо, при этом доказательство полностью аналогично доказательству теоремы IV.2.6 [23].

1.2 Некоторые сведения из теории дифференциальных игр

В работе рассматриваются управляемые системы вида:

$$\dot{x}=f(t,x,u,v),\ t\in[t_0,\vartheta_0],\ x\in\mathbb{R}^n,\ u\in P,\ v\in Q. \tag{1.2.1}$$

Предполагается, что u – управление первого игрока, v – управление второго игрока. В дальнейшем предполагается, что выполнены следующие условия:

1. множества $P\subset\mathbb{R}^p$, $Q\subset\mathbb{R}^q$ компактны;
2. функция $f(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ – непрерывна;
3. функция f локально липшицева по фазовой переменной;
4. функция f удовлетворяет условию подлинейного роста по x: существует $\Xi>0$, что для всех $t\in[t_0,\vartheta_0]$, $u\in P$, $v\in Q$, $x\in\mathbb{R}^n$ верно неравенство
$$\|f(t,x,u,v)\|\leq\Xi(1+\|x\|). \tag{1.2.2}$$

Также в некоторых построениях и утверждениях будем предполагать выполненным условие седловой точки в маленькой игре (условие Айзекса):

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s,f(t,x,u,v)\rangle=\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s,f(t,x,u,v)\rangle \tag{1.2.3}$$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$ и $(t, x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Также вводятся функции $H_+(t, x, s)$ и $H_-(t, x, s)$ следующим образом:

$$H_+(t, x, s) \triangleq \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle; \tag{1.2.4}$$

$$H_-(t, x, s) \triangleq \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(t, x, u, v) \rangle; \tag{1.2.5}$$

В случае когда выполняется условие седловой точки в маленькой игре эти две функции совпадают в таком случае $H(t, x, s) \triangleq H_+(t, x, s) = H_-(t, x, s)$ называют гамильтонианом игры [71].

Перейдем к описанию движений. Движение в системе (1.2.1) определяется характером выбора класса возможных стратегий управления. Из всего многообразия формализаций в настоящей работе используются следующие виды управлений: программные движения, стратегии и контрстратегии. Перейдем к их описанию, следуя [40], [132].

Обычное программное управление на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ ($t_* \in [t_0, \vartheta_0]$) – это измеримые по Борелю функции $u(\cdot) : [t_*, \vartheta_0] \to P$, $v(\cdot) : [t_*, \vartheta_0] \to Q$. Если выбраны программные управления, то движение в системе (1.2.1), выходящее из позиции (t_*, x_*), определяется как решение дифференциального уравнения

$$x(t) = x_* + \int_{t_*}^{t} f(\theta, x(\theta), u(\theta), v(\theta)) d\theta. \tag{1.2.6}$$

По теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения решение уравнение существует и единственно на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$. Обозначим это решение как $x(\cdot, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$.

Также в теории дифференциальных игр рассматриваются обобщенные управления. Мы, следуя [72], [90], [92], будем рассматривать обобщенные управления с дискриминацией второго игрока. Пусть $\nu \in \mathcal{E}_{t_*}$, $\eta \in \Pi_{t_*}[\nu]$ тогда под движением, порожденным обобщенным управлением η, выходящим из позиции (t_*, x_*), мы понимаем решение уравнения:

$$x(t) = x_* + \int_{[t_*,t)\times P\times Q} f(\theta, x(\theta), u, v)\eta(d(\theta, u, v)). \qquad (1.2.7)$$

Это решение всегда существует и единственно на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$. Обозначим его через $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta)$. При построении такой схемы управления предполагается, что второй игрок выбирает обобщенное управление ν, сообщает его первому игроку, после чего тот выбирает обобщенное управление $\eta \in \Pi_{t_*}[\nu]$ в виде реакции на управление противника. Напомним, что управление η является обобщенным аналогом пары управление обычных управлений (u, v).

Также обобщенные движения могут быть введены при помощи слабо измеримых вероятностностнозначных функций. Пусть (t_*, x_*) – некоторая позиция, $\tilde{\eta}(\cdot) : [t_*, \vartheta_0] \to \mathfrak{R}_{P\times Q}$ – слабо измеримая функция. Определим обобщенное движение под действием мерозначной функции $\tilde{\eta}(\cdot)$ $\tilde{\varphi}(\cdot, t_*, x_*, \tilde{\eta})$ как решение уравнения

$$\dot{x}(t) = \int_P f(t, x(t), u, v)\tilde{\eta}(t)(d(u, v))$$

с начальными данными $x(t_*) = x_*$. Решение этой задачи существует и единственно [23]. Если мера $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ и слабо измеримое отображение $\tilde{\eta}(\cdot) : [t_*, \vartheta_0] \to \mathfrak{R}_P$ таковы, что

$$\int_{[t_*,\vartheta_0]\times P\times Q} c(t, u, v)\eta(d(t, u, v)) = \int_{t_*}^{\vartheta_0} \int_{P\times Q} c(t, u, v)\tilde{\eta}(t)(d(u, v))dt$$

$$\forall c \in C([t_*, \vartheta_0] \times P \times Q), \qquad (1.2.8)$$

то $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta) = \tilde{\varphi}(\cdot, t_*, x_*, \tilde{\eta})$. Как было показано выше, для любой меры $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$ существует такая слабо измеримая функция $\tilde{\eta} : [t_*, \vartheta_0] \to \mathfrak{R}_P$, что условие (1.2.8) выполнено; аналогично для каждого слабо измеримого отображения $\tilde{\eta} : [t_*, \vartheta_0] \to \mathfrak{R}_P$ существует такая мера $\eta \in \mathcal{H}_{t_*}$, что выполнено условие (1.2.8).

Отметим еще одно соотношение между обычными и обобщенными управлениями, которое следует из правила экстремального сдвига (см. [32]): для всякого постоянного управления второго игрока $v \in Q$, обобщенного управления первого игрока $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$ и любой позиции (t_*, x_*) существует последовательность кусочно-постоянных непрерывных справа программных управлений $u_k(\cdot)$ такая, что $x(\cdot, t_*, x_*, u_k(\cdot), v)$ сходится к $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \odot v)$ равномерно на $[t_*, \vartheta_0]$.

Рассмотрим теперь, основываясь на формализации Н.Н. Красовского, позиционные стратегии, называемые также стратегиями по принципу управления с обратной связью. Рассмотрим случай, когда оба игрока формируют свое управление по принципу обратной связи.

Позиционной стратегией первого игрока называется произвольная функция $U : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to P$, аналогично позиционной стратегией второго игрока называется произвольная функция $V : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to Q$. Опишем способ формирования движений. Вначале рассмотрим пошаговые движения. Пусть (t_*, x_*) – некоторая позиция, $\Delta = \{\tau^k\}_{k=0}^m$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, $v[\cdot]$ – измеримое (по Борелю) управление второго игрока, ломаной Эйлера $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, t_*, x_*, U, v[\cdot]]$ называется абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая уравнениям

$$x_\Delta[t] = x_\Delta[\tau^k] + \int_{\tau^k}^t f(\theta, x_\Delta[\theta], u^k, v[\theta])d\theta$$

на отрезках $[\tau^k, \tau^{k+1}]$, $k = \overline{0, m-1}$; здесь $u^k = U(\tau^k, x_\Delta[\tau^k])$, $x_\Delta[\tau^0] = x_*$. Обозначим все множество пошаговых движений при фиксированным разбиении отрезка управления через $X_\Delta[t_*, x_*, U]$:

$$X_\Delta[t_*, x_*, U] = \{x_\Delta[\cdot, t_*, x_*, U, v[\cdot]] : v[\cdot] : [t_*, \vartheta_0] \to Q \text{ измерима по Борелю}\}.$$

В теории дифференциальных игр обыкновенно рассматриваются пределы ломаных Эйлера при стремлении мелкости разбиения к 0 – конструктивные движения [40], [132] (мелкость разбиения будем обозначать через $d(\Delta)$). Обозначим все множество конструктивных движений через $X[t_*, x_*, U]$. Если это будет нужно элементы этого множества (конструктивные движения, под действием стратегии U) будем обозначать через $x[\cdot, t_*, x_*, U]$.

Рассмотрим теперь случай, когда первый игрок выбирает свое управление из класса контрстратегий. Контрстратегией первого игрока называется любая функция $U : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \times Q \to P$, измеримая по третьему аргументу (предполагается измеримость по Борелю). Движение, порожденное контрстратегией $U(t, x, v)$, выходящее из позиции (t_*, x_*), определяется как пределы ломаных Эйлера при стремлении мелкости разбиения к нулю. Сами ломаные Эйлера строятся следующим образом [40], [132]. Пусть $\Delta = \{\tau^k\}_{k=0}^m$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, на каждом промежутке $[\tau^k, \tau^{k+1})$ $(k = \overline{0, m-1})$ ломаную Эйлера определяется как решение уравнения:

$$x_\Delta[t] = x_\Delta[\tau^k] + \int_{\tau^k}^{t} f(\theta, x_\Delta[\theta], U(\tau^k, x_\Delta[\tau^k], v[\theta]), v[\theta]) d\theta, \;\; x_0[\tau^k] \triangleq x_*. \tag{1.2.9}$$

Множество всех конструктивных движений, порожденных контрстратегией U будем обозначать также как множество все движений, порожденных стратегией.

Опишем теперь позиционные стратегии второго игрока. Он формирует свое управление по следующему правилу: пусть $\Xi = \{\xi_j\}_{j=0}^r$ – некоторое разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, второй игрок выбирает свое управление $v[t]$ постоянным на промежутке $[\xi^j, \xi^{j+1})$, $j = \overline{0, r-1}$, и равным $V(\xi^j, x^j)$, где x^j – положение системы, реализовавшееся к моменту ξ^j. Множество всех конструктивных движений, порожденных позиционной стратегией второго игрока обозначим через $\tilde{X}[t_*, x_*, V]$.

В дальнейшем мы, следуя [40], [132], будем рассматривать задачи наведения системы (1.2.1) на множество M внутри множества N. Множество

M обыкновенно называется целевым, множество N – фазовыми ограничениями. Предполагается, что множества M и N непусты и замкнуты. Всюду в дальнейшем рассматривается случай, когда $M \subset N$. В случае, когда это предположение не выполнено, достаточно рассмотреть в качестве целевого множества $M \cap N$. Подобная задача называется задачей (M, N)-наведения для системы (1.2.1).

Задачи мы будем рассматривать как в классе позиционных стратегий обоих игроков так и в классе контрстратегий первого игрока и стратегий второго (см. [40], [132]). В первом случае задачи формулируются следующим образом [40], [132]. Пусть зафиксирована начальная позиция (t_*, x_*). Задача первого игрока: найти позиционную стратегию, которая гарантируют приведение любого конструктивного движения, выходящего из позиции (t_*, x_*) на множество M внутри множества N: для любого конструктивного движения, порожденного стратегией U, выходящего из позиции (t_*, x_*) существует $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$, что

$$((\tau, x[\tau]) \in M) \ \& \ ((t, x[t]) \in N \ \forall t \in [t_*, \tau]).$$

Задача второго игрока: для фиксированной начальной позиции требуется найти окрестности множеств $H(M)$ и $G(N)$, стратегию второго игрока V, которая исключает встречу любого конструктивного движения выходящего из начальной позиции с множеством $H(M)$ внутри множества $G(N)$.

Задача в классе контрстратегий первого игрока и стратегий второго формулируется точно таким же образом с заменой позиционной стратегии U на контрстратегию.

Отметим, что вне множества N задача второго игрока заведома разрешена, поэтому мы будем предполагать, что $(t_*, x_*) \in N$.

Структура дифференциальных игр дается в серии теорем об альтернативе, полученных в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина. Мы рассмотрим теоремы об альтернативе в классе позиционных стратегий обоих игроков (теоремы 17.1 и 17.2 [40]), и в классе контрстратегий первого игрока и стратегий второго игрока (теорема 82.2 [40]). Теорема об альтернативе в классе позиционных стратегий обоих игроков справедлива в случае когда выполнено условие (1.2.3), условие седловой точки в маленькой игре, теорема об альтернативе в классе контрстратегий первого игрока и позиционных стратегий второго справедлива без этого предположения.

Рассмотрим подробнее теорему об альтернативе [40], [132]. Согласно теореме об альтернативе множество N делится на две части: множество успешной разрешимости задачи первого игрока и множество успешной разрешимости задачи второго игрока. При этом множество успешной разрешимости задачи первого игрока является максимальным u-стабильным мостом в задаче (M, N)-наведения для системы (1.2.1). Оптимальная стратегия (контрстратегия в случае невыполнения условия (1.2.3)) строится методом экстремального сдвига на максимальный u-стабильный мост в рассматриваемой задаче наведения. В дальнейшем множество успешной разрешимости задачи (M, N)-наведения (максимальный u-стабильный мост) будем обозначать через $\mathfrak{W}$.

Множество $W \subset N$ называется стабильным мостом, если для любой позиции $(t_*, x_*) \in W$ и любого постоянного управления $v_* \in Q$ существует решение дифференциального включения на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, y(t), u, v_*) : u \in P\}, \tag{1.2.10}$$

удовлетворяющее начальному условию $y(t_*) = x_*$, такое, что для некоторого $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$ справедливы включения:

$$(y(\tau) \in M[\tau]) \;\&\; (y(t) \in W[t] \;\forall t \in [t_*, \tau]).$$

Приведенное здесь определение эквивалентно определению данному в работах Н.Н. Красовского и А.И. Субботина; см. [40], [132]. Понятие u-

стабильности может быть введено с использованием мер-управлений, введенных в разделе 1.1. А именно, множество всех решений дифференциального включения (1.2.10) совпадает с множеством $\{\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \odot v_*) : \mu \in \mathcal{R}_{t_*}\}$ [23]. Таким образом, множество W является u-стабильным, если для каждой позиции (t_*, x_*) и каждого постоянного управления $v_* \in Q$ существует такая мера $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$, что

$$\exists \tau \in [t_*, \vartheta_0] : ((\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v_*) \in M[\tau]) \;\& \\ (\forall t \in [t_*, \tau] : (\varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v_*) \in W[t]))).$$

Определим понятие экстремальной стратегии и экстремальной контрстратегии к множеству W. Пусть (t_*, x_*) – некоторая позиция, w_* – ближайший к x_* элемент множества $W[t_*]$:

$$w_* \in \operatorname{Argmin}\{\|w - x_*\| : w \in W[t_*]\}. \tag{1.2.11}$$

Стратегия $U(t, x)$ определяемая по правилу

$$U(t_*, x_*) \in \operatorname{Argmin}\{\max_{v \in Q} \langle w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v)\rangle : u \in P\} \tag{1.2.12}$$

называется стратегией, экстремальной к множеству W. Аналогично определяется экстремальная контрстратегия. Пусть $(t_*, x_*) \in W$, $v_* \in Q$, w_* ближайший к позиции элемент множества $W[t_*]$ (см. (1.2.11)). Контрстратегия, определяемая по правилу:

$$U(t_*, x_*, v_*) \in \operatorname{Argmin}\{\langle w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v_*)\rangle : u \in P\} \tag{1.2.13}$$

называется контрстратегией, экстремальной к множеству W.

Выделим два важных случая задачи наведения. В случае когда множество M имеет вид $\{\vartheta_0\} \times F$ (F – некоторое замкнутое множество в фазовом пространстве) задача (M, N)-наведения называется задачей наведения на множество F *"в момент"*, а в случае когда $M = [t_0, \vartheta_0] \times F$ задача (M, N)-наведения называется задачей наведения *"к моменту"*.

Кроме задач наведения в теории дифференциальных игр рассматривают задачи с заданным функционалом платы. В этом случае также считается, что цели игроков противоположны: первый игрок стремится минимизировать значение функционала, второй игрок стремится его максимизировать. Также задача в общем случае рассматривается в классе контрстратегий первого игрока, позиционных стратегий второго игрока, а в случае выполнения условия седловой точки в маленькой игре (1.2.3) в классе позиционных стратегий обоих игроков.

Будем предполагать, что функционал платы для конструктивных движений, выходящих из позиции (t_*, x_*), $\varsigma(t_*, x_*, x[\cdot])$ имеет вид: $\omega_1(x[\vartheta_0])$ или $\min_{t\in[t_*,\vartheta_0]}\omega_2(t, x[t])$. Рассматриваемая в данной работе задача первого игрока состоит в том чтобы найти контрстратегию U_* (стратегию в случае выполнения условия (1.2.3)), что

$$\sup\{\varsigma(t_*, x_*, x[\cdot]) : x[\cdot] \in X[t_*, x_*, U_*]\} = \\ = \min_U \sup\{\varsigma(t_*, x_*, x[\cdot]) : x[\cdot] \in X[t_*, x_*, U]\}$$

Аналогично, рассматриваемая в настоящей работе задача второго игрока состоит в том, чтобы найти стратегию V_*, для которой

$$\inf\{\varsigma(t_*, x_*, x[\cdot]) : x[\cdot] \in \tilde{X}[t_*, x_*, V_*]\} = \\ = \max_U \inf\{\varsigma(t_*, x_*, x[\cdot]) : x[\cdot] \in \tilde{X}[t_*, x_*, V]\}.$$

Отметим, что из теоремы об альтернативы следует, что для каждой позиции (t_*, x_*) существуют контрстратегия U_*, стратегия V_* разрешающие поставленные задачи при этом значение результата в обоих задачах совпадает [40], [132]. Эта величина называется ценой дифференциальной игры для заданной позиции.

Также задача с функционалом платы в случае когда функционал имеет вид $\omega_1(x(\vartheta_0))$ называется задачей “в момент”, а в случае когда функционал платы имеет вид $\min_t \omega_2(x(t))$ задачей "к моменту".

В [40] конструктивное движение под действием стратегии (контрстратегии) U определяется как множество непрерывных функций $x[\cdot]$ таких, что существует последовательность ломаных Эйлера $x_{\Delta_k}[\cdot, t_*, x_k, U]$ равномерно сходящаяся к $x[\cdot]$. Таким образом определяемый пучок траекторий шире, чем рассматриваемый в настоящей работе. Однако как следует из теореме об альтернативе, множество успешной разрешимости задачи наведения в случае когда рассматриваются ломаные Эйлера с позицией, близкой к данной, совпадает с множеством успешной разрешимости задаче наведения в формализации, рассматриваемой в настоящей работе.

Рассматриваемые в настоящей работе формализации не исчерпывают всего множества возможных способов формирования управлений игрокам. Кратко опишем некоторые из этих способов.

Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным предложено понятие стратегии управления по принципу управления с поводырем [40], [132], [37]. Эти стратегии фактически являются обобщением понятия позиционных стратегий. В рассматриваемом случае управление формируется с учетом не только текущей позиции, но и позиции идеализированной модели движения. Также известен вид оптимальной стратеги, которая в этом случае также оказывается стратегией по принципу экстремального сдвига. При этом прицеливание ведется не на стабильный мост, а на идеализированное движение, двигающееся по этому мосту. Благодаря такому способу прицеливания решение задачи наведения оказывается в этом случае устойчивым к информационным помехам [40], [132]. В случае выполнения условия седловой точки в маленькой игре оказывается справедлива альтернатива, в случае когда один или оба игрока конструируют свои стратегии по принципу управления с поводырем. В случае невыполнения условия седловой точки в маленькой игре первый игрок может выбирать свое управление в классе контрстратегий с поводырем [40, с. 369]. В этом случае движения оказываются устойчивыми к информационным помехам, и справедливо альтернативное разбиение всего пространства позиций на множества успешной разрешимости задач обоих игроков [40].

В случае когда информация об управлении второго игрока поступает непрерывно, первый игрок может осуществлять свое управление не только в классе контрстратегий, но и в классе квазистратегий [137], [125]. Пусть $\mathcal{U}$ – множество всех измеримых (по Борелю) функций из $[t_0, \vartheta_0]$ в P, $\mathcal{V}$ – множество всех измеримых (по Борелю) функций из $[t_0, \vartheta_0]$ в Q. Квазистратегией (обычной) называется любое отображение $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$, обладающее свойством неупреждаемости: если $v_1(\cdot)$, $v_2(\cdot) \in \mathcal{V}$ таковы, что $v_1(t) = v_2(t)$ $\forall t \in [t_0, \tau]$ для некоторого τ, то

$$\mathcal{A}(v_1(\cdot))(\tau) = \mathcal{A}(v_2(\cdot))(\tau).$$

Используемые в настоящей работе контрстратегии являются частным случаем квазистратегий.

Пусть $\nu \in \mathcal{E}_t$, $\tau \in [t, \vartheta_0]$ сужение меры ν на $[t, \tau] \times Q$ обозначим через $[\nu, \tau\rangle$. Через $[\eta, \tau\rangle$ обозначим сужение меры $\eta \in \mathcal{H}_t$, для $\tau \in [t, \vartheta_0]$. Если $B \in \mathcal{P}(\mathcal{H}_t)$, то $[B, \tau\rangle \triangleq \{[\eta, \tau\rangle : \eta \in B\}$. Кроме обычных квазистратегий вводятся их обобщенные, многозначные аналоги [72]. А именно, многозначной обобщенной квазистратегией на отрезке $[t, \vartheta_0]$ будем называют любую функцию $\alpha : \mathcal{E}_t \to \mathcal{P}(\mathcal{H}_t)$, удовлетворяющую следующим свойствам:

1. $\alpha(\nu) \neq \varnothing$ $\forall \nu \in \mathcal{E}_t$;

2. $\alpha(\nu) \subset \Pi_t[\nu]$ $\forall \nu \in \mathcal{E}_t$;

3. $\forall \nu_1, \nu_2 \in \mathcal{E}_t$ $\forall \tau \in [t, \vartheta_0] : ([\nu_1, \tau\rangle = [\nu_2, \tau\rangle) \to ([\alpha(\nu_1), \tau\rangle = [\alpha(\nu_2), \tau\rangle)$.

Определенная выше обычная квазистратегия является частным случаем обобщенной многозначной квазистратегии. Также однозначная квазистратегия может быть рассмотрена как селектор многозначной. Отметим, что определение квазистратегии обобщается до понятия неупреждающего многозначного отображения [93], [94].

Множества успешной разрешимости задачи первого игрока в случае, когда первый игрок конструирует свое управление в классе контрстратегий, и в случае когда первый игрок выбирает свое управление в классе квазистратегий, совпадают [72].

Также в случае, когда информация об управлении второго игрока первому игроку неизвестна, зато второй игрок знает информацию об управлении первого игрока, второй игрок может осуществлять свое управление в классе контрстратегий или квазистратегий. Если первый игрок игрок выбирает свое управление в классе позиционных стратегий, то в этом случае справедлива теорема об альтернативе [40]. Естественно, в этом случае множество успешной разрешимости вообще говоря отличается от множества успешной разрешимости в случае, когда управление выбирается в классе контрстратегия/стратегия.

Если информация об управлении друг друга игрокам неизвестна, то управления могут быть формализованы в классе смешанных стратегий [40], [132]. Смешанной стратегией первого (второго) игрока называется произвольная функция из пространства позиций в пространство $\mathfrak{R}_P$ (пространство $\mathfrak{R}_Q$). Конструктивное движение определяется так же как в случае позиционных стратегий с заменой значения функции при выбранных управлениях на математическое ожидание по произведению выбранных мер-управлений. Смешанная стратегия также может быть аппроксимирована стохастическим управлением [40], [132]. Также в классе смешанных стратегий справедлива теорема об альтернативном разбиении пространства позиций [40], [132]. В случае выполнения условия седловой точки в маленькой игре множество успешной разрешимости задачи первого (второго) игрока, которое получается в классе смешанных стратегий, совпадает с множеством успешной разрешимости в классе позиционных стратегий.

Как следует из теории унификации дифференциальных игр [132], решение дифференциальной игры (то есть построения множества успешной разрешимости задачи наведения) полностью определяется соответствующим гамильтонианом игры. В случае, когда управление выбирается в классе контрстратегия/стратегия в качестве гамильтониана выбирается функция $H_-(\cdot,\cdot,\cdot)$ (см. (1.2.5)), в случае когда управление выбирается в классе стратегия/контрстратегия в качесвте гамильтониана выбирается функция $H_+(\cdot,\cdot,\cdot)$ (см. (1.2.4)), в случае когда управления выбираются в классе смешанных стратегий в качестве гамильтониана рассматривается функция

$$H_m(t,x,s) = \min_{\mu\in\mathfrak{R}_P}\max_{\nu\in\mathfrak{R}_Q}\int_P\int_Q\langle s, f(t,x,u,v)\rangle\nu(dv)\mu(du)\rangle.$$

При этом min и max в определении H_m могут быть переставлены [132].

Имеет место неравенство [132]

$$H_+(t,x,s) \geq H_m(t,x,s) \geq H_-(t,x,s)\ \forall (t,x)\in[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n \forall s\in\mathbb{R}^n.$$

Из этого неравенства следует следующее свойство: обозначим через $\mathfrak{W}_+$ множество успешной разрешимости задачи первого игрока в классе стратегия/контрстратегия, через $\mathfrak{W}_m$ – множество успешной разрешимости задачи первого игрока в классе смешанных стратегий, тогда имеет место неравенство [132]

$$\mathfrak{W}_+ \subset \mathfrak{W}_m \subset \mathfrak{W}$$

(через $\mathfrak{W}$, как и всюду ниже, обозначается множество успешной разрешимости задачи первого игрока в классе контрстратегия/стратегия). Если выполняется условие седловой точки в маленькой игре (1.2.3), то все три функции совпадают, также совпадают и множества $\mathfrak{W}_+$, $\mathfrak{W}_m$ и $\mathfrak{W}$.

Для случая задач “в момент” с функционалом платы, А.И. Субботиным установлено, что функция цены $c(\cdot,\cdot):[t_0,\vartheta_0]\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ задачи в соответствующей формализации удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\hat{H}(t,x,D_xc)=0 \tag{1.2.14}$$

с краевым условием на правом конце, совпадающим с $\omega_1(x)$ [71]. Решение уравнения (1.2.14) понимается в обобщенном (минимаксном) смысле [71]. В (1.2.14) $\hat{H}(\cdot,\cdot,\cdot)$ есть

1. $H_-(\cdot,\cdot,\cdot)$ в случае, когда игра рассматривается в классе контрстратегия/стратегия,

2. $H_+(\cdot,\cdot,\cdot)$ в случае, когда игра рассматривается в классе стратегия/контрстратегия,

3. $H_m(\cdot,\cdot,\cdot)$ в случае, когда игра рассматривается в классе смешанных стратегий.

В случае когда рассматриваются игры с функционалом платы вида $\min_t\omega_2(t,x(t))$ функция цены удовлетворяет паре минимаксных неравенств [71].

Также для задач минимизации функционала платы рассматриваются ε-субоптимальные (супероптимальные) стратегии первого (второго игрока), гарантирующие при пошаговом движении значение функционала платы, отличающееся не более чем на ε от оптимального значения [34].

Кроме описанных формализаций в теории дифференциальных игр находят широкое применение ε-оптимальные стратегии Б.Н. Пшеничного (см. [65], [66]), конструкция которых восходит к работам Л.С.Понтрягина [60],[61]. В рассматриваемом случае управление игроков строится следующим образом: второй игрок в каждый момент времени τ_i выбирает отрезок управления ε_i и свое управление $v_i(\cdot)$ на отрезке $[\tau_i, \tau_i + \varepsilon_i]$ и сообщает их первому игроку, который, распоряжаясь полученной информацией, конструирует свое управление. В момент времени $\tau_{i+1} = \tau_i + \varepsilon_i$ второй игрок опять выбирает отрезок управления и свое управление. При этом выбор моментов τ_i ведется таким образом, чтобы $\{\tau_i\}$ образовывали конечное разбиение отрезка $[t_0, \vartheta_0]$. Б.Н.Пшеничным установлено существование функции цены дифференциальной игры при такой формализации.

1.3 Метод программных итераций

В настоящем разделе мы опишем конструкции метода программных итераций в задаче (M, N)-наведения. Метод программных итераций был построен А.Г. Ченцовым для решения различных классов задач теории дифференциальных игр. Метод программных итераций позволяет сводить дифференциальную игру к последовательности программных игровых задач, решение которых идейно проще. Конкретный вид метода программных итераций определяется оператором программного поглощения; решение дифференциальной игры является пределом последовательности, получающейся последовательным применением оператора программного поглощения. Само решение дифференциальной игры является неподвижной точкой соответствующего оператора. Таким образом, метод программных итераций аналогичен итерационным методам решения уравнений в полуупорядоченных пространствах (см. [105, §3.8]).

Нами будет рассмотрено два варианта метода программных итераций. Варианты метода программных итераций различаются оператором программного поглощения. В первом случае оператор программного поглощения учитывает реакции на все возможные управления второго игрока, во втором – только на постоянные. Оба введенных оператора действуют в семействе подмножеств $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$.

Пусть E – замкнутое множество, положим

$$\mathbb{A}(E) \triangleq \{(t_*, x_*) \in E : \forall \nu \in \mathcal{E}_{t_*}\ \exists \eta \in \Pi_{t_*}[\nu]\ \exists \tau \in [t_*, \vartheta_0] : \\ (\varphi(\tau, t_*, x_*, \eta) \in M[\tau] \& (\forall t \in [t_*, \tau]\ \varphi(t, t_*, x_*, \eta) \in E[t]))\},$$

$$A(E) \triangleq \{(t_*, x_*) \in E : \forall v \in Q\ \exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*}[\nu]\ \exists \tau \in [t_*, \vartheta_0] : \\ (\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v) \in M[\tau] \& (\forall t \in [t_*, \tau]\ \varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v) \in E[t]))\}.$$

Второй оператор программного поглощения может быть описан в терминах так называемых v-систем [72], [90]. А именно, определим для каждого $v \in Q$ функцию $f_v(t,x,u) \triangleq f(t,x,u,v)$, и рассмотрим управляемую систему:

$$\dot{x} = f_v(t,x,u),\ t \in [t_0, \vartheta_0],\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in P. \tag{1.3.1}$$

Для систем (1.3.1) множество обычных управлений на отрезке $[t_*, \vartheta_0]$ – это множество измеримых функций $u(\cdot) : [t_*, \vartheta_0] \to P$, множество всех обобщенных управлений – множество $\mathcal{R}_{t_*}$. Заметим, что если $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$, $x_* \in \mathbb{R}^n$ решение уравнения

$$x(t) = x_* + \int_{[t_*,t)\times P} f_v(\theta, x(\theta), u)\mu(d(\theta,u))$$

существует, единственно и совпадает с $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \odot v)$. Для фиксированного v введем оператор A_v действующий на пространстве всех подмножеств $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ по правилу: если $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, то

$$\begin{aligned} A_v(E) \triangleq \{&(t_*, x_*) \in E : \exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*}[\nu]\ \exists \tau \in [t_*, \vartheta_0] : \\ &(\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v) \in M[\tau])\&(\forall t \in [t_*, \tau]\ \varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v) \in E[t])\}. \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Тогда имеем, что для каждого множества $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$

$$A(E) = \bigcap_{v \in Q} A_v(E).$$

Таким образом, в случае конечности множества Q построение одной итерации сводится к решению конечного количества программных игровых задач, что позволяет в некоторых случаях получить конкретный вид для множества успешной разрешимости задачи первого игрока (см. [27], [123]).

Заметим, что если множество E замкнуто, то множества $\mathbb{A}(E)$ и $A(E)$ также замкнуты. Этот факт установлен в [90], однако имеет смысл воспроизвести соответствующее доказательство. В самом деле, пусть

$\{(t_n, x_n)\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{A}(E)$ и $(t_n, x_n) \to (t_*, x_*)$, $n \to \infty$, докажем, что $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}(E)$. Для каждой меры $\nu \in \mathcal{E}$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют мера $\eta_n \in \Pi_{t_n}[\nu]$ и момент τ_n, что $\varphi(\tau_n, t_n, x_n, \eta_n) \in M[\tau_n]$ и для всех $t \in [t_n, \tau_n]$ $\varphi(t, t_n, x_n, \eta_n) \in E[t]$. Существует подпоследовательность последовательности $\{\tau_n\}$, сходящееся к некоторому моменту τ_*. Без ограничения общности будем считать, что сама последовательность $\{\tau_n\}$ сходится к τ_*. Доопределим, если надо, меры η_n на σ-алгебру подмножеств $[t_*, \tau_*] \times P \times Q$ произвольным способом, так чтобы $\eta_n \in \Pi_{t_*}[\nu]$. В силу $*$-слабой компактности $\Pi_{t_*}[\nu]$ существует подпоследовательность, сходящаяся к некоторой мере η_*. Без ограничения общности считаем, что сама последовательность $\{\eta_n\}$ сходится к мере η_*. Тогда имеем, что для любого $t \in [t_*, \vartheta_0]$

$$\varphi(t, t_n, x_n, \eta_n) \to \varphi(t, t_*, x_*, \eta_*).$$

Поскольку $\tau_n \to \tau_*$, $n \to \infty$ и $(\tau_n, \varphi(\tau_n, t_n, x_n, \eta_n)) \in M$, в силу замкнутости множества M имеем, что $(\tau_*, \varphi(\tau_*, t_*, x_*, \eta_*)) \in M$. Аналогично получаем, что для всех $t \in [t_*, \tau_*]$ $(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta_*)) \in E$. Отсюда в силу произвольности меры η имеем, что $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}(E)$. Из произвольности (t_*, x_*) следует, что $\mathbb{A}(E)$ замкнуто.

Доказательство замкнутости множества $A(E)$ проводится таким же образом.

Также А.Г. Ченцовым были получено свойство замкнутости сечений в случае, когда замкнуты лишь сечения множества, определяющего фазовые ограничения (см. [90]). Фактически замкнутость в этом случае определяется в топологии тихоновского произведения экземпляров пространства $\mathbb{R}^n$.

Отметим соотношение между итерациями:

$$\mathbb{A}(E) \subset A(E) \ \forall E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n. \tag{1.3.3}$$

Свойство (1.3.3) имеет место, поскольку множество всех постоянных управлений второго игрока изоморфно вкладывается в множество всех обобщенных управлений второго игрока $\mathcal{E}_t$, отображением $v \mapsto \nu_v$, при этом $\{\mu \odot v : \mu \in \mathcal{R}_t\} = \Pi_t[\nu_v]$. Следовательно, если $(t_*, x_*) \in \mathbb{A}(E)$, то, в частности, для каждого $v \in Q$ существует обобщенное управление первого игрока $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$ такое, что для некоторого $\tau \in [t_*, \vartheta_0]$ $\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v) \in M[\tau]$, причем $\varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v) \in E[t]$, $t \in [t_*, \tau]$. Это эквивалентно тому, что $(t_*, x_*) \in A(E)$.

Пусть $F \subset E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, тогда из определений операторов $\mathbb{A}$ и A следует, что

$$\mathbb{A}(F) \subset \mathbb{A}(E), \tag{1.3.4}$$

$$A(F) \subset A(E). \tag{1.3.5}$$

Определим теперь две последовательности подмножеств множества N.

$$\mathcal{W}_0 \triangleq N, \ \mathcal{W}_k \triangleq \mathbb{A}(\mathcal{W}_{k-1}) \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.3.6}$$

$$W_0 \triangleq N, \ W_k \triangleq A(W_{k-1}) \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.3.7}$$

Из свойств (1.3.3), (1.3.5) следует, что

$$\mathcal{W}_k \subset W_k, \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1.3.8}$$

В самом деле, для $k = 0$ свойство (1.3.8) очевидно выполнено. Пусть (1.3.8) верно для $k - 1$ докажем, что (1.3.8) верно и для k. Имеем,

$$\mathcal{W}_k = \mathbb{A}(\mathcal{W}_{k-1}) \subset A(\mathcal{W}_{k-1}) \subset A(W_{k-1}) = W_k.$$

Отметим [72], [90], что если $\mathfrak{W}$ – множество успешной разрешимости задачи (M, N)-наведения, то

$$\mathfrak{W} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{W}_k, \tag{1.3.9}$$

$$\mathfrak{W} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} W_k. \tag{1.3.10}$$

Методы, разработанные при обосновании метода программных итераций, позволяют установить равенство множеств успешной разрешимости задачи первого игрока в случае, когда управление выбирается в классах контрстратегия/стратегия и квазистратегия/стратегия. Также для задач наведения на множество А.Г. Ченцовым построен прямой метод программных итераций, позволяющий явно строить обобщенную многозначную квазистратегию, последовательно сужая возможные отклики первого игрока на объявленное управление второго игрока [93], [94]. Прямая и "непрямая" версия метода программных итераций находятся в двойственности.

Для дифференциальных игр с функционалом платы А.Г. Ченцовым также рассматривались варианты метода программных итераций [72], [86]. Задачи с функционалом платы могут быть сведены к бесконечному набору задач наведения (благодаря рассмотрению множеств Лебега для функционала платы), и таким образом для их решения можно применить рассмотренные выше методы. Также были построены варианты метода программных итераций, позволяющий явно найти функцию цены как для задач "в момент", так и для задач "к моменту". Благодаря построенному варианту метода программных итераций удается построить функцию цены для целого ряда классов дифференциальных игр [72]. Отметим также, что метод программных итераций для задач с функционалом платы рассматривался в работах [102], где построены две последовательности, сходящиеся к функции цены ("снизу" и "сверху"). Для этих же задач предолжен метод построения ε-субоптимальных позиционных стратегий, использующий сходимость последовательности функций, построенной по методу программных итераций (см. [103]). Известны также классы дифференциальных игр, в которых решение может быть получено за конечное число итераций (см. [86], [78],[79], [80]). Вместе с тем известны примеры, когда последовательность не стабилизируется.

Развитие идей, лежащих в основе метода программных итераций, привело к построению А.И. Субботиным и А.Г. Ченцовым итерационных процедур для определения обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби [73]

Глава 2

Некоторые свойства структуры решения дифференциальных игр

Настоящая глава посвящена изучению геометрических свойств структуры решений задач наведения для конфликтно-управляемых систем. При этом решение понимается как множество успешной разрешимости задачи первого игрока. Изучаются такие свойства как непрерывная зависимость сечений от времени и связность сечений в случае связности целевого множества. Показано, что в общем случае эти свойства не обязательно присущи решениям дифференциальных игр. Найдены достаточные условия непрерывной зависимости сечений множества успешной разрешимости игровой задачи наведения и связности сечений. Кроме этого предложен метод построения дифференциальных игр с заданным множеством успешной разрешимости игровой задачи наведения. Также рассматривался вопрос о решении задачи наведения “к моменту” для автономных конфликтно-управляемых систем. Этой задаче сопоставлена задача наведения “в момент” для системы, в которой расширены возможности первого игрока. Показано, что в этом случае последовательности, построенные по методу программных итераций (итерациям стабильности), совпадают. Также совпадают множества успешной разрешимости в обоих задачах. Отсюда, в

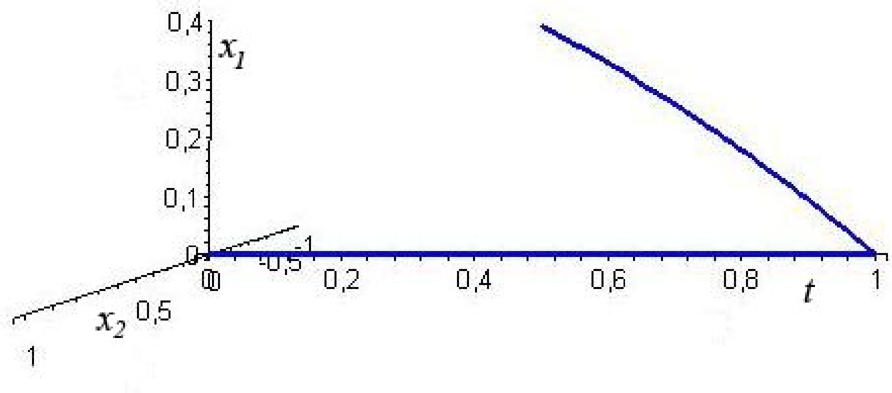

Рис. 2.1: Множество K.

частности, следует, что сечения множества успешной разрешимости задачи наведения “к моменту” непрерывно зависят от времени и связны в случае связности целевого множества.

2.1 Пример

В этом разделе рассматривается дифференциальная игра сближения с множеством без фазовых ограничений, то есть предполагается, что $N = [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Игра рассматривается на плоскости. В построенном примере максимальный u-стабильный мост в задаче наведения на точку имеет вид двух фрагментов кривых (см. рис. 2.1). При этом один из фрагментов начинается позже второго. Таким образом, показано, что даже для задач без фазовых ограничений сечения множества успешной разрешимости задачи первого игрока зависят от времени разрывно, и сечения моста в задаче наведения на связное множество могут быть несвязанными множествами.

При построении примера используются сглаженные индикаторные функции множеств. При их помощи выделяются множество, являющееся стабильным мостом.

Для упрощения записи в этом разделе мы будем вместе привычного обозначения позиции (t, x) в случае $x \in \mathbb{R}^2$ писать явно, опуская внутренние скобки, (t, x_1, x_2), где $x = (x_1, x_2)$.

Пусть $K \subset [0, 1] \times \mathbb{R}^2$,

$$K \triangleq ([0, 1] \times \{0\} \times \{0\}) \cup \{(t, x_1) : t \in [1/2, 1], x_1 = 1 - \exp(t - 1)\} \times \{0\}.$$

Далее мы исследуем дифференциальную игру, в которой множество K является стабильным мостом.

Пусть $\varepsilon > 0$. Через K_ε обозначим дополнение до ε-окрестности множества K в пространстве $[0, 1] \times \mathbb{R}^2$,

$$K_\varepsilon \triangleq ([0, 1] \times \mathbb{R}^2) \setminus [\bigcup_{(t,x_1,x_2)\in K} O_\varepsilon(t, x_1, x_2)], \tag{2.1.1}$$

где $O_\varepsilon(t, x_1, x_2)$ – ε-окрестность позиции (t, x_1, x_2).

Определим функцию $\chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, действующую по правилу

$$\chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) \triangleq \frac{\mathbf{d}((t, x_1, x_2), K_\varepsilon)}{\mathbf{d}((t, x_1, x_2), K_\varepsilon) + \mathbf{d}((t, x_1, x_2), K)}. \tag{2.1.2}$$

Отметим следующие свойства функции $\chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2)$.

1. $\chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) \in [0, 1]\ \forall (t, x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.
2. $\chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) = 1 \ \Leftrightarrow\ (t, x_1, x_2) \in K$.
3. Функция $\chi_{K,\varepsilon}(\cdot, \cdot, \cdot)$ является липшицевой. В самом деле функция $\mathbf{d}((\cdot, \cdot, \cdot), K_\varepsilon)$ как расстояние до замкнутого множества липшицева, а
$$\mathbf{d}((t, x_1, x_2), K_\varepsilon) + \mathbf{d}((t, x_1, x_2), K) \geq \varepsilon\ \forall (t, x_1, x_2) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^2.$$

Рассмотрим дифференциальную игру с фиксированным временем окончания для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & u_1 \\ \dot{x}_2 = & \chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) u_2 - v, \end{cases} \tag{2.1.3}$$

$t \in [0,1]$, $u_1, u_2, v \in [-1,1]$. В качестве целевого множества рассмотрим множество $M = \{(1,0,0)\}$.

Из определения функции $\chi_{K,\varepsilon}(\cdot,\cdot,\cdot)$ следует, что правая часть уравнения удовлетворяет всем условиям, которые требуются в настоящей работе. Более того условие седловой точки в маленькой игре (1.2.3) также выполнено. Поэтому мы будем рассматривать игру в классе позиционных стратегий.

Вначале мы покажем, что позиции, не лежащие на множестве K, не принадлежат мосту. Более того, для них второй (распоряжающийся управлением v) игрок имеет выигрышную программную стратегию. Пусть $(t^*, x_1^*, x_2^*) \notin K$. Рассмотрим вначале случай $x_2^* \neq 0$. Программное управление второго игрока положим равным $v = -\mathrm{sgn}(x_2^*)$. Поскольку при $x_2 \neq 0$ $\chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2) < 1$, то, при $u_2 \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned} \chi_{K,\varepsilon}(t,x_1,x_2)u_2 - v > 0, &\quad \text{если } x_2^* > 0;\\ \chi_{K,\varepsilon}(t,x_1,x_2)u_2 - v < 0, &\quad \text{если } x_2^* < 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $|x_2|$ не убывает в случае, когда мы рассматриваем ломаные Эйлера. Переходя к пределу мы получаем, что $|x_2|$ не убывает вдоль конструктивных движений. А значит, позиции (t, x_1, x_2) с $x_2 \neq 0$ не могут принадлежать множеству позиционного поглощения в рассматриваемой задаче. Пусть теперь $x_2^* = 0$, но $(t^*, x_1^*, x_2^*) \notin K$. Обозначим $\rho \triangleq \mathbf{d}((t^*, x_1^*, x_2^*), K)$. Пусть τ положительно и не превосходит $\rho/2$. Для $t \in [t^*, t^* + \tau]$ при любом выборе управлений

$$x_1(t) \leq \int_{t^*}^{t} |u_1(\xi)| d\xi \leq \tau \leq \rho/2. \tag{2.1.4}$$

Следовательно, $\mathbf{d}((t, x_1(t), x_2(t)), K) \leq \rho/2$. Поэтому при любом выборе управлений u_1, u_2 и v

$$(t, x_1(t), x_2(t)) \notin K \ \forall t \in [t^*, t^* + \tau].$$

Отсюда имеем, что

$$\max\{\chi_{K,\varepsilon}(t,x_1,x_2) : t \in [t^*, t^*+\tau], |x_1 - x_1^*| \leq \tau\} \leq$$
$$\leq \max\{\chi_{K,\varepsilon}(t,x_1,x_2) : t \in [t^*, t^*+\tau], |x_1 - x_1^*| \leq \rho/2\} < 1. \quad (2.1.5)$$

Введем обозначение

$$L \triangleq 1 - \max\{\chi_{K,\varepsilon}(t,x_1,x_2) : t \in [t^*, t^*+\tau], |x_1 - x_1^*| \leq \rho/2\}.$$

Предположим, что второй игрок выбрал управление $v = -1$. Тогда в силу (2.1.4) и (2.1.5) при любом выборе управления первого игрока будут справедливы неравенства

$$x_2(t^*+\tau) = \int_{t^*}^{t^*+\tau} (1 + \chi_{K,\varepsilon}(t, x_1(\xi), x_2(\xi))u_2(\xi))d\xi \geq$$
$$\geq \int_{t^*}^{t^*+\tau} (1 - \max\{\chi_{K,\varepsilon}(t,x_1,x_2) : t \in [t^*, t^*+\tau], |x_1 - x_1^*| \leq \rho/2\})d\xi$$
$$\geq (1 - \max\{\chi_{K,\varepsilon}(t,x_1,x_2) : t \in [t^*, t^*+\tau], |x_1 - x_1^*| \leq \rho/2\})\tau > 0.$$

Следовательно, если $(t,x_1,x_2) \notin K$, $x_2 = 0$, то через достаточно малый промежуток времени τ система окажется в множестве $\{(t,x_1,x_2) : x_2 \geq L\tau\}$, которое не пересекается с множеством позиционного поглощения в силу того, что $L > 0$. Это рассуждение верно в случае, когда мы рассматриваем ломаные Эйлера. Переходя к пределу мы получаем, что точки (t,x_1,x_2) со свойством $(t,x_1,x_2) \notin K$ не принадлежат множеству позиционного поглощения в рассматриваемой дифференциальной игре.

В то же время множество K u-стабильно. Действительно, на любое управление второго игрока v^*, объявленное в позиции (t^*, x_1^*, x_2^*) первый игрок отвечает управлением

$$u_1(t) = \begin{cases} 0, & (t^*, x_1^*, x_2^*) \in [0,1] \times \{(0,0)\}; \\ -\exp(t-1), & t^* \in [1/2, 1], x_1^* = 1 - \exp(t^*-1), x_2^* = 0; \end{cases} \quad (2.1.6)$$

$u_2(t) = v^*$. Заметим, что $u_1(t), u_2(t) \in [-1, 1]$, $t \in [0, 1]$. Докажем, что $(t, x_1(t), x_2(t)) \in K$.

Если $(t^*, x_1^*, x_2^*) \in [0, 1] \times \{(0, 0)\}$, то управляемая система приобретает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & 0 \\ \dot{x}_2 = & \chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2)v^* - v^*. \end{cases} \tag{2.1.7}$$

В этом случае функция $x_1(t) = x_2(t) = 0$, $t \in [t^*, 1]$ является решением уравнения (2.1.7). В самом деле, $\chi_{K,\varepsilon}(t, 0, 0) = 1$, $t \in [t^*, 1]$, следовательно $\dot{x}_2(t) = 0 = v^* - v^*$. Из теоремы о существовании и единственности следует, что рассмотренная функция является решением системы (2.1.7).

Случай $t^* \in [1/2, 1], x_1^* = 1 - \exp(t^* - 1), x_2^* = 0$ рассматривается аналогично. Подставляя выбранные управления (см. (2.1.6)) в (2.1.3) получаем, что управляемая система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & -\exp(t - 1) \\ \dot{x}_2 = & \chi_{K,\varepsilon}(t, x_1, x_2)v^* - v^*. \end{cases} \tag{2.1.8}$$

В этом случае функция $x_1(t) = 1 - \exp(t - 1)$, $x_2(t) = 0$ является решением системы (2.1.8). Из теоремы существования и единственности, следует, что эта функция является единственным решением.

Таким образом, показано, что в дифференциальной игре наведения на множество $\{(1, 0, 0)\}$ для системы (2.1.3) максимальный стабильный мост равен множеству K. Из вида множества K видно, что сечения множества K разрывно зависят от времени (в данном случае разрыв при $t = 1/2$), а сечения множества K при $t \in [1/2, 1]$ состоят из пары точек.

2.2 Метод построения игр с заданным множеством успешной разрешимости задачи первого игрока

В настоящем разделе предложен метод построения игр с заданным множеством успешной разрешимости. Пусть заданы два замкнутых множества M и W. В следующей теореме дается достаточное условие того, что W является множеством успешной разрешимости в задаче $(M, [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n)$-наведения для некоторой конфликтно-управляемой системы. Множество успешной разрешимости предполагается вложенным в некоторую гиперплоскость, задаваемую условием

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b, \ \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0.$$

Без ограничения общности будем считать, что $n = m+1$, а гиперплоскость описывается равенством $x_{m+1} = 0$.

Теорема 1. *Пусть $M \subset W \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^m \times \{0\}$, M и W замкнуты. Если существует вещественное неотрицательное число R, что*

$$\forall (t^*, x^*) \in W \ \exists \hat{t} > t^* (\exists \hat{x} \in M[\hat{t}] : \|\hat{x} - x^*\| \leq R|\hat{t} - t^*|) \ \& \\ (\forall t \in (t^*, \hat{t}) \ \exists x \in W[t] : \ \|x - x^*\| \leq R|t - t^*|), \quad (2.2.1)$$

то можно подобрать дифференциальную игру, удовлетворяющую обычным условиям, и условию седловой точки в маленькой игре такую, что W является множеством успешной разрешимости задачи наведения на M в этой игре.

Следствие 1. *Пусть $W \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^m \times \{0\}$, $W[\vartheta_0] \neq \varnothing$. Если существует вещественное неотрицательное число R, что*

$$\forall (t_*, x_*) \in W \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0] \ \exists x \in W[t] : \ \|x - x_*\| \leq R(t - t_*), \qquad (2.2.2)$$

то существует дифференциальная игра удовлетворяющая всем наложенным условиям, в том числе условию седловой точки в маленькой игре, такая, что W является множеством успешной разрешимости в задаче наведения на $M \triangleq \{\vartheta_0\} \times W[\vartheta_0]$.

Доказательство теоремы 1. Для $K \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^{m+1}$ аналогично (2.1.2) положим

$$\chi_{K,\varepsilon}(t,x) \triangleq \frac{\mathbf{d}((t,x),K_\varepsilon)}{\mathbf{d}((t,x),K_\varepsilon) + \mathbf{d}((t,x),K)}, \tag{2.2.3}$$

здесь K_ε определяется аналогично (2.1.1)

$$K_\varepsilon \triangleq ([t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^{m+1}) \setminus [\bigcup_{(t,x)\in K} O_\varepsilon(t,x)]. \tag{2.2.4}$$

Заметим, что функция $\chi_{K,\varepsilon}(\cdot,\cdot)$ является липшицевой,

$$0 \le \chi_{K,\varepsilon}(t,x) \le 1,\ \chi_{K,\varepsilon}(t,x) = 1 \Leftrightarrow (t,x) \in K.$$

Рассмотрим дифференциальную игру

$$\begin{cases} \dot{x}_i & = & u_i, & i = \overline{1,n} \\ \dot{x}_{m+1} & = & \chi_{W,\varepsilon}(t,x)u_{m+1} - v \end{cases} \tag{2.2.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} |u_i|^2 \le R^2,\ u_{m+1}, v \in [-1,1]$$

Отметим, что точки $(t,x) \notin W$ не могут принадлежать мосту в задаче наведения на множество M. Это доказывается методами, аналогичными примененным при разборе примера (см параграф 2.1).

Докажем, что W и есть максимальный u-стабильный мост в задаче наведения на множество M. Пусть $(t_*, x_*) \in W$, сформируем управление $u(\cdot)$, позволяющее удержать движение в силу системы (2.2.5) на W вплоть до встречи с M. Для этого применим следующую процедуру. По условию выполнено условие (2.2.1). Пусть $\Delta = \{t^k\}_{k=0}^r$ разбиение промежутка $[t^*, \vartheta_0]$. Положим $\tilde{x}^0 = x^*$. Для каждого $k = \overline{0, r-1}$

- либо существует $\tilde{x}^{k+1}$ со свойством:

$$(t^k, \tilde{x}^{k+1}) \in W,\ \|\tilde{x}^{k+1} - \tilde{x}^k\| \leq R|t^{k+1} - t^k|,$$

- либо существуют $\hat{x}^k$, и $\hat{t}^k \in [t^k, t^{k+1}]$, что

$$(\hat{t}^k, \hat{x}^k) \in M \text{ и } \|\hat{x}^k - \tilde{x}^k\| \leq R|\hat{t}^k - t^k|.$$

Таким образом, по заданному разбиению Δ можно выбрать j со свойством: существуют $t' \in [t^j, t^{j+1}]$, $x' \in \mathbb{R}^{m+1}$, что $(t', x') \in M$ и для всех $k = \overline{1, j}$ существуют $\tilde{x}^k$ такие, что $(t^k, \tilde{x}^k) \in W$, при этом $\|\tilde{x}^k - \tilde{x}^{k-1}\| \leq R|t^k - t^{k-1}|$ и $\|x' - \tilde{x}^j\| \leq R|t' - t^j|$. Определим для $i = \overline{1, m}$

$$(u^{\Delta}(t))_i \triangleq \begin{cases} \tilde{x}^k - \tilde{x}^{k-1}, & t \in [t^{k-1}, t^k], \quad k = \overline{1, j}, \\ x' - \tilde{x}^j, & t \in [t^j, t'], \\ 0, & t \in [t', \vartheta_0]. \end{cases}$$

Заметим, что $\|u\|_m \leq R$. Определим функцию $y(\cdot, t_*, x_*, \Delta) : [t_0, \vartheta_0] \to \mathbb{R}^{m+1}$ по правилу: для $i = \overline{1, m}$ положим

$$(y(t, t^*, x^*, \Delta))_i \triangleq x_* + \int_{t^*}^{t} (u^{\Delta}(\xi))_i d\xi,$$

$$(y(t, t^*, x^*, \Delta))_{m+1} \triangleq 0.$$

Очевидно, что $y(\cdot, t^*, x^*, \Delta)$ липшицева с константой R. Также Хаусдорфово расстояние от $(t, y(t, t^*, x^*, \Delta))$ до W не превосходит $(\max\{1, R\})d(\Delta)/2$ при $t \in [t^*, t']$.

Если $\{\Delta_l\}_{l=0}^{\infty}$ последовательность разбиений, то получающийся при каждом фиксированном разбиении момент встречи с множеством M обозначим через t'_l.

Существует последовательность разбиений Δ_l такая, что $d(\Delta_l) \to 0$, $(t'(\Delta_l), y(t'(\Delta_l), t^*, x^*, \Delta_l)) \to (\tau', z')$, $y(\cdot, t^*, x^*, \Delta_l)$ равномерно сходится к некоторой функции $z(\cdot, t^*, x^*)$. Имеем, что

- $(z(t, t_*, x_*))_{m+1} = 0$,
- $z(\cdot, t^*, x^*)$ – липшицева с константой R,
- $(\tau', z(\tau', t^*, x^*)) = (\tau', z') \in M$,
- расстояние от $(t, z(t, t^*, x^*))$ до W равно 0, $\forall t \in [t_*, \tau']$,
- $z(t_*, t_*, x_*) = x_*$.

Так как функция $z(\cdot, t^*, x^*)$ липшицева с константой R, то существует измеримая функция $w(\cdot) : [t_0, \vartheta_0] \to \mathbb{R}^m$, $\|w(t)\|_m \leq R$ п. в. на $[t_0, \vartheta_0]$ такая, что

$$z(t, t^*, x^*) = x_* + \int_{t^*}^{t} w(\xi) d\xi.$$

Можно считать, что $\|w(t)\| \leq R$ всюду на $[t_0, \vartheta_0]$.

Пусть $(t_*, x_*) \in W$, $v_* \in [-1, 1]$, определим $u(\cdot)$ по правилу $u_i(t) \triangleq w_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, где $w(\cdot)$ определено выше, $u_{m+1} \triangleq v_*$. Заметим, что $\sum_{i=1}^{m} |u_i(t)|^2 \leq 1$, $u_{m+1} \in [-1, 1]$ и $x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v_*) = z(t, t_*, x_*)$. Следовательно, $x(\tau', t_*, x_*, u(\cdot), v_*) \in M[\tau']$ и $x(t, t_*, x_*, u(\cdot), v_*) \in W[t]$ для всех $t \in [t_*, \tau']$. Из этого следует, что W – u-стабильный мост в задаче наведения на M. $\square$

Доказательство следствия 1. Имеем, что если в качестве M выбрать множество $\{\vartheta_0\} \times W[\vartheta_0]$, то выполнение условия (2.2.2) влечет выполнение условия (2.2.1), при этом для всех позиций $(t_*, x_*) \in W$ $\hat{t}$ равно ϑ_0. Отсюда получаем утверждение следствия. $\square$

2.3 Достаточное условие регулярной зависимости сечений максимальных стабильных мостов от времени

В настоящем разделе изучается условия при которых сечения множества успешной разрешимости задачи первого игрока в дифференциальной игре непрерывно зависят от времени, и являются связными при связности целевого множества. Рассматриваются конфликтно-управляемые системы вида (1.2.1) и считаем, что множества M, N и система (1.2.1) фиксированы, предполагается, также, что условие седловой точки (1.2.3) в маленькой игре выполнено.

Полученное в настоящей работе достаточное условие непрерывной зависимости сечений множества успешной разрешимости от времени и связности сечений определяется условием преобладания первого игрока, которое может быть определено в терминах понятия стабильной дорожки [40].

Следующее утверждение дает условие при которых целая кривая принадлежит множеству успешной разрешимости в задаче (M, N)-наведения. Оно основано на теореме Н.Н. Красовского и А.И. Субботина о стабильной дорожке [40].

Предложение 1. *Пусть* $(t^*, x_*) \in \mathfrak{W}$, $t_* \in [t_0, t^*]$. *Пусть существует абсолютно непрерывная функция* $w(\cdot) : [t_*, t^*] \to \mathbb{R}^n$ *такая, что*

1. $w(t^*) = x_*$;
2. $(t, w(t)) \in N \ \forall t \in [t_*, t^*]$;
3. $H(t, w(t), s) \leq \langle s, \dot{w}(t) \rangle$ *для всех* $s \in \mathbb{R}^n$ *и почти всех* $t \in [t_*, t^*]$.

Тогда $(t, w(t)) \in \mathfrak{W}$ *для всех* $t \in [t_*, t^*]$.

Отметим в виде следствий результаты, справедливые в случае неположительности гамильтониана.

Следствие 2. *Пусть* $(t^*, x_*) \in \mathfrak{W}$, $t_* \in [t_0, t^*]$. *Если* $(t, x_*) \in N$ *при всех* $t \in [t_*, t^*]$ *и* $H(t, x_*, s) \leq 0$ *для всех* $s \in \mathbb{R}^n$ *и* $t \in [t_*, t^*]$, *тогда* $(t, x_*) \in \mathfrak{W}$ *для всех* $t \in [t_*, t^*]$.

Следствие 3. *Пусть* N *не возрастает по сечениям и* $H(t, x, s) \leq 0$ *для всех* $(t, x) \in N$ *и* $s \in \mathbb{R}^n$ *тогда* $\mathfrak{W}$ *не возрастает по сечениям.*

Доказательство обоих следствий будет дано после доказательства предложения 1.

Доказательство предложения 1. Рассмотрим вначале задачу $(\{(t^*, x_*)\}, N)$-наведения. Обозначим множество успешной разрешимости в этой задаче через $\widehat{W}$. По теореме об альтернативе множество $\widehat{W}$ является максимальным u-стабильным мостом в задаче $(\{(t^*, x_*)\}, N)$-наведения. Покажем, что $\{(t, w(t)) \; : \; t \in [t_*, t^*]\}$ является стабильной дорожкой в рассматриваемой сейчас задаче.

Согласно [40, (48.3)] $\{(t, w(t)) : t \in [t_*, t^*]\}$ является стабильной дорожкой, если для почти всех $t \in [t_*, t^*]$

$$\dot{w}(t) \in \mathcal{H}(t, w(t)),$$

где

$$\mathcal{H}(t, x) \triangleq \bigcap_{v \in Q} \mathrm{co}\{f(t, x, u, v) : u \in P\}.$$

Также согласно лемме 48.1 [40] вектор $h \in \mathbb{R}^n$ принадлежит множеству $\mathcal{H}(t, x)$ тогда и только тогда, когда $H(t, x, s) \leq \langle s, h \rangle$ для всех $s \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, по предположению имеем, что для почти всех $t \in [t_*, t^*]$ $\dot{w}(t) \in \mathcal{H}(t, w(t))$. Тогда $\{(t, w(t)) : t \in [t_*, t^*]\}$ является стабильной дорожкой для системы (2.4.1). Поскольку $\{(t, w(t)) : t \in [t_*, t^*]\} \subset N$ по теореме 48.1 [40] имеем, что множество $\{(t, w(t)) : t \in [t_*, t^*]\} \subset \widehat{W}$.

Докажем, что множество $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$ является u-стабильным мостом в задаче (M, N)-наведения. В самом деле, $M \subset \mathfrak{W} \cup \widehat{W} \subset N$. Пусть теперь $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathfrak{W} \cup \widehat{W}$. Если $(\hat{t}, \hat{x}) \in \mathfrak{W}$, то по определению $\mathfrak{W}$ для каждого $v_* \in Q$ существует решение дифференциального включения (1.2.10) с начальными данными $y(\hat{t}) = \hat{x}$, содержащееся в $\mathfrak{W}$ вплоть до встречи с M. Пусть $(\hat{t}, \hat{x}) \in \widehat{W}$. Зафиксируем $v_* \in Q$. По определению $\widehat{W}$ существует решение включения (1.2.10) $y_1(\cdot)$, со свойствами: $y_1(\hat{t}) = \hat{x}$, $y_1(t) \in \widehat{W}$ для всех $t \in [\hat{t}, t^*]$, $y_1(t^*) = x_*$. Поскольку $\mathfrak{W}$ является максимальным u-стабильным мостом в задаче (M, N)-наведения, существует функция $y_2(\cdot)$, являющаяся решением дифференциального включения (1.2.10), со свойствами: $y_2(t^*) = x_*$, $(\xi^*, y_2(\xi^*)) \in M$ для некоторого $\xi^* \in [t^*, \vartheta_0]$ и $(t, y_2(t)) \in \mathfrak{W}$ для всех $t \in [t^*, \xi^*]$. Определим функцию $y^*(\cdot) : [\hat{t}, \vartheta_0]$ следующим образом:

$$y^*(t) = \begin{cases} y_1(t), & t \in [\hat{t}, t^*], \\ y_2(t), & t \in [t^*, \vartheta_0]. \end{cases}$$

Функция $y^*(\cdot)$ – абсолютно непрерывна, является решением дифференциального включения (1.2.10) при фиксированном v_*, $(\xi^*, y^*(\xi^*)) \in M$, $(t, y^*(t)) \in \mathfrak{W} \cup \widehat{W}$, $t \in [\hat{t}, \xi^*]$. Таким образом, для каждого $(\hat{t}, \hat{x})$ и $v_* \in Q$ существует решение дифференциального включения (1.2.10) выходящее из $(\hat{t}, \hat{x})$ и содержащееся в $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$ вплоть до встречи с M.

Поскольку множество $\mathfrak{W} \cup \widehat{W}$ является u-стабильным мостом в задаче (M, N)-наведения, а множество $\mathfrak{W}$ по определению наибольший стабильный мост имеем, что $\widehat{W} \subset \mathfrak{W}$. Следовательно, $\{(t, w(t)) : t \in [t_*, t^*]\} \subset \widehat{W} \subset \mathfrak{W}$.

$\square$

Доказательство следствия 2. В самом деле, рассмотрим $w(t) = x_*$, $t \in [t_*, t^*]$. Тогда для этой функции $w(\cdot)$ справедливы предположения предложения 1. Таким образом, $(t, x_*) \in \mathfrak{W}$. □

Доказательство следствия 3. В самом деле пусть $(t^*, x_*) \in \mathfrak{W}$. Тогда имеем, что в силу условия невозрастания множества N для всех $t \in [t_0, t^*]$ справедливо включение $(t, x_*) \in N$. Также по условию $H(t, x_*, s) \leq 0$ для всех $t \in [t_0, t^*]$, $s \in \mathbb{R}^n$. Согласно следствию 2 имеем, что $(t, x_*) \in \mathfrak{W}$ для всех $t \in [t_0, t^*]$. Таким образом, множество $\mathfrak{W}$ не убывает по сечениям. □

Далее мы рассмотрим вопрос о геометрических свойствах множества успешной разрешимости задачи первого игрока. А именно: мы докажем, что сечения множества успешной разрешимости задачи наведения зависит от времени непрерывно в случае неположительности гамильтониана и выполнения условия, имеющего смысл обобщенного невозрастания фазовых ограничений по сечениям.

Мы рассматриваем сечение множества E как многозначное отображение $t \mapsto E[t]$. Следуя [19], [71], обозначим

$$\limsup_{t \to t_*} E[t] \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n : \liminf_{t \to t_*} d(y, E[t]) = 0\}; \tag{2.3.1}$$

$$\liminf_{t \to t_*} E[t] \triangleq \{y \in \mathbb{R}^n : \limsup_{t \to t_*} d(y, E[t]) = 0\}. \tag{2.3.2}$$

Рассмотренные множества называются верхним и нижним пределом многозначного отображения соответственно [71], [19]. Имеет место включение

$$\liminf_{t \to t_*} E[t] \subset \limsup_{t \to t_*} E[t]. \tag{2.3.3}$$

Если E_1 и E_2 множества в пространстве позиций такие, что $E_1 \subset E_2 \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, то для каждого $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$

$$\liminf_{t \to t_*} E_1[t] \subset \liminf_{t \to t_*} E_2[t]. \tag{2.3.4}$$

Аналогично вводятся правый (левый) верхний и нижний пределы многозначного отображения. Также для правых (левых) пределов справедливо неравенства (2.3.3) и (2.3.4). Многозначное отображение называется полунепрерывным сверху если выполняется включение

$$\limsup_{t\to t_*} E[t] \subset E[t_*] \ \forall t_* \in [t_0, \vartheta_0];$$

полунепрерывным снизу, если выполняется включение

$$E[t_*] \subset \liminf_{t\to t_*} E[t] \ \forall t_* \in [t_0, \vartheta_0].$$

Многозначное отображение непрерывно, если полунепрерывно сверху и снизу [19]. Аналогично вводятся понятия полунепрерывности сверху (снизу) и непрерывности справа и слева соответственно. Отметим, что, если E замкнутое множество, то отображение $t \mapsto E[t]$ всегда полунепрерывно сверху. Таким образом, для замкнутых множеств полунепрерывность снизу и непрерывность эквивалентны.

Пусть $z : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ некоторая непрерывная функция, локально липшицевая по фазовой переменной, удовлетворяющая по ней условию подлинейного роста. Решение дифференциального уравнения

$$\dot{x} = z(t, x) \tag{2.3.5}$$

с начальными условиями $z(t_*) = x_*$, определенное на всем промежутке $[t_0, \vartheta_0]$ будем обозначать через $\phi_z(\cdot, t_*, x_*)$. Для каждой позиции $(t_*, x_*) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ обозначим $\psi_z(t_*, x_*) \triangleq \phi_z(t_0, t_*, x_*)$. Отметим, что для всех $(t_1, x_1) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, $(t_2, x_2) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ справедливо утверждение

$$(\psi_z(t_1, x_1) = \psi_z(t_2, x_2)) \ \Leftrightarrow \ (x_1 = \phi_z(t_1, t_2, x_2)) \Leftrightarrow \ (x_2 = \phi_z(t_2, t_1, x_1)). \tag{2.3.6}$$

Также $y = \psi_z(t, x)$ тогда и только тогда, когда $x = \phi_z(t, t_0, y)$.

Будем называть множество $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ z-невозрастающим по сечениям, если множество

$$\Psi_z(E) \triangleq \{(t, \psi_z(t, x)) : (t, x) \in E\} \tag{2.3.7}$$

не возрастает по сечениям. Заметим, что для каждого множества $E \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$E = \{(t, \phi_z(t, t_0, y)) : (t, y) \in \Psi_z(E)\}. \tag{2.3.8}$$

Сформулируем теперь условия регулярной зависимости от времени сечений множества успешной разрешимости $\mathfrak{W}$ в задаче наведения системы вида (1.2.1) на множество M внутри множества N. Предполагается, что выполнены стандартные условия на множества и функцию динамики. Дополнительно предполагается, что выполнено условие седловой точки в маленькой игре (см. 1.2.3).

Теорема 2. *Пусть существует непрерывная функция $z(\cdot, \cdot) : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая по второй переменной условиям локальной липшицевости и подлинейного роста такая, что N есть z-невозрастающее по сечениям множество, и $H(t, x, s) \leq \langle s, z(t, x) \rangle$ для всех $(t, x) \in N$, $s \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

1. *если отображение $t \mapsto M[t]$ непрерывно справа, то отображение $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$ непрерывно;*
2. *если $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$ и M линейно связно, то и множества $\mathfrak{W}[t]$, $t \in [t_0, \vartheta_0]$ – линейно связные множества.*

Отметим два важных частных случая, когда заключения теоремы 2 выполнено.

Следствие 4. *Пусть N не возрастает по сечениям, и $H(t, x, s) \leq 0$ для всех $(t, x) \in N$, $s \in \mathbb{R}^n$. Тогда*

1. *если отображение $t \mapsto M[t]$ непрерывно справа, то отображение $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$ непрерывно;*

2. *если* $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$ *и* M *линейно связно, то и множества* $\mathfrak{W}[t]$, $t \in [t_0, \vartheta_0]$ *– линейно связные множества.*

Следствие 5. *Пусть функция динамики* f *представляется в виде*

$$f(t, x, u, v) = g(t, x) + h(t, u, v)$$

для некоторых функций $g : [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *и* $h : [t_0, \vartheta_0] \times P \times Q \to \mathbb{R}^n$*; причем выполнено условие седловой точки в маленькой игре*

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, h(t, u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, h(t, u, v) \rangle \ \forall t \in [t_0, \vartheta_0] \ \forall s \in \mathbb{R}^n.$$

Пусть, также, N *есть* g*-невозрастающее по сечениям множество, и*

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, h(t, u, v) \rangle \leq 0 \ \forall t \in [t_0, \vartheta_0] \ s \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

1. *если отображение* $t \mapsto M[t]$ *непрерывно справа, то отображение* $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$ *непрерывно;*

2. *если* $M \subset \{\vartheta_0\} \times \mathbb{R}^n$ *и* M *линейно связно, то и множества* $\mathfrak{W}[t]$, $t \in [t_0, \vartheta_0]$ *– линейно связные множества.*

Доказательство следствий 4 и 5 будет дано после доказательства теоремы 2.

При доказательстве теоремы 2 используется следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения теоремы 2, и пусть, также,* $(t_*, x_*) \in \mathfrak{W}$*. Тогда*

$$(t, \phi_z(t, t_*, x_*)) \in \mathfrak{W} \ \forall t \in [t_0, t_*]. \tag{2.3.9}$$

Доказательство. Докажем вначале, что

$$(t, \phi_z(t, t_*, x_*)) \in N \ \forall t \in [t_0, t_*]. \tag{2.3.10}$$

Зафиксируем $t \in [t_0, t_*]$. Обозначим $y = \psi_z(t_*, x_*)$. Согласно (2.3.6) имеем, что

$$y = \psi_z(t, \phi_z(t, t_*, x_*)).$$

Также справедливо равенство

$$\phi_z(t, t_*, x_*) = \phi_z(t, t_0, y). \tag{2.3.11}$$

Из условия z-неубывания множества N получаем, что $(t, y) \in \Psi_z(N)$. Используя представление (2.3.8) получаем, что

$$(t, \phi_z(t, t_0, y)) \in N.$$

Из этого включения, равенства (2.3.11) и произвольности выбора $t \in [t_0, t_*]$ заключаем, что включение (2.3.10) выполнено.

Также для почти всех $t \in [t_0, t_*]$

$$\dot{\phi}_z(t, t_*, x_*) = z(t, \phi_z(t, t_*, x_*)),$$

а по предположению теоремы для всех $(t, x) \in N$, $s \in \mathbb{R}^n$

$$H(t, x, s) \leq \langle s, z(t, x) \rangle.$$

Тогда из предложения 1 следует, что выполнено включение (2.3.9).

$\square$

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим вначале пункт 1. Пусть $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$.

Докажем, что выполнены неравенства

$$\mathfrak{W}[t_*] \subset \liminf_{t \to t_* + 0} \mathfrak{W}[t]. \tag{2.3.12}$$

$$\mathfrak{W}[t_*] \subset \liminf_{t \to t_* - 0} \mathfrak{W}[t]. \tag{2.3.13}$$

Пусть $x \in \mathfrak{W}[t_*]$. Если $x \in M[t_*]$ то, поскольку отображение $t \mapsto M[t]$ полунепрерывно снизу справа, имеем, что

$$x \in \liminf_{t \to t_* + 0} M[t]. \tag{2.3.14}$$

Поскольку $M \subset \mathfrak{W}$ из свойства монотонности верхнего предела (см (2.3.4)) и включения (2.3.14) следует, что

$$x \in \liminf_{t \to t_* + 0} \mathfrak{W}[t] \ \forall x \in M[t_*]. \tag{2.3.15}$$

Если $x \in \mathfrak{W}[t_*] \setminus M[t_*]$ то, поскольку $\mathfrak{W}$ u-стабильно, имеем, что можно подобрать $\tau \in (t_*, \vartheta_0]$ такое, что для любого $t \in [t_*, \tau]$ существует $y \in \mathfrak{W}[t]$ со свойством: $\|y - x\| \leq K(t - t_*)$ (здесь K – некоторая величина, зависящая от позиции (t_*, x)). Отсюда, имеем оценку $d(x, \mathfrak{W}[t]) \leq K(t - t_*)$. Следовательно,

$$x \in \liminf_{t \to t_* + 0} \mathfrak{W}[t] \ \forall x \in \mathfrak{W}[t_*] \setminus M[t_*].$$

Из этого включения и включения (2.3.15) следует, что включение (2.3.12) выполнено.

Докажем теперь включение (2.3.13). Пусть $x_* \in \mathfrak{W}[t_*]$. По лемме 1 имеем, что $(t, \phi_z(t, t_*, x_*)) \in \mathfrak{W} \ \forall t \in [t_0, t_*]$. Поскольку

$$\lim_{t \to t_* - 0} \phi_z(t, t_*, x_*) = x_*$$

заключаем, что имеет место включение

$$x_* \in \liminf_{t \to t_* - 0} \mathfrak{W}[t].$$

Таким образом, включение (2.3.13) также выполняется.

Включения (2.3.12) и (2.3.13) справедливы для любого $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$. Отсюда получаем, что многозначное отображение $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$ полунепрерывно снизу на отрезке $[t_0, \vartheta_0]$. Так как множество $\mathfrak{W}$ замкнуто, имеем, что отображение $t \mapsto \mathfrak{W}[t]$ непрерывно на отрезке $[t_0, \vartheta_0]$.

Перейдем к доказательству пункта 2. Пусть $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, $x_1, x_2 \in \mathfrak{W}[t_*]$. Выберем $v_* \in Q$. Поскольку множество $\mathfrak{W}$ u-стабильно, существуют решения дифференциального включения $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot)$

$$\dot{y}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, y(t), u, v_*) : u \in P\}$$

с начальными данными $y_1(t_*) = x_1$ и $y_2(t_*) = x_2$, такие, что $(\vartheta_0, y_i(\vartheta_0)) \in M$, $y_i(t) \in \mathfrak{W}[t]$, $t \in [t_*, \vartheta_0]$. Поскольку M – связное множество, существует кривая $\{(\vartheta_0, \zeta_0(\lambda)) : \lambda \in [0,1]\} \subset M$, соединяющая точки $(\vartheta_0, y_1(\vartheta_0))$ и $(\vartheta_0, y_2(\vartheta_0))$. Рассмотрим кривую $\{(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)) : \lambda \in [0,3]\}$ в пространстве $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$:

$$(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)) \triangleq$$
$$\triangleq \begin{cases} (t_* + \lambda(\vartheta_0 - t_*), y_1(t_* + \lambda(\vartheta_0 - t_*))), & \lambda \in [0,1] \\ (\vartheta_0, \zeta_0(\lambda - 1)), & \lambda \in [1,2] \\ (\vartheta_0 + (\lambda - 2)(t_* - \vartheta_0), y_2(\vartheta_0 + (\lambda - 2)(t_* - \vartheta_0))), & \lambda \in [2,3]. \end{cases}$$

Эта непрерывная кривая соединяет точки (t_*, x_1) и (t_*, x_2) в пространстве $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. При этом $(\xi(\lambda), \zeta(\lambda)) \in \mathfrak{W}$, по построению. Также $\xi(\lambda) \geq t_*$, $\lambda \in [0,3]$. Следовательно, по лемме 1 имеем, что

$$\phi_z(t_*, \xi(\lambda), \zeta(\lambda)) \in \mathfrak{W}[t_*], \ \lambda \in [0,3].$$

Поскольку $\xi(0) = \xi(3) = t_*$, $\zeta(0) = x_1$, $\zeta(3) = x_2$ и $\phi_z(t_*, t_*, x) = x$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$, непрерывная кривая $\{\phi_z(t_*, \xi(\lambda), \zeta(\lambda)) : \lambda \in [0,3]\}$ соединяет точки x_1 и x_2. Таким образом, пункт 2 доказан.

□

Доказательства следствия 4. Полагаем в теореме 2 $z(t,x) = 0$ $\forall (t,x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. □

Доказательства следствия 5. Полагаем в теореме 2 $z(t,x) = g(t,x)$ $\forall (t,x) \in [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. □

2.4 Задача наведения автономной конфликтно-управляемой системы на цилиндрическое множество

2.4.1 Преобразование исходной задачи

В настоящем разделе рассматриваются автономные системы:

$$\dot{x} = f(x, u, v), \ u \in P, v \in Q. \tag{2.4.1}$$

Эти системы будем рассматривать на промежутке $[0, \vartheta]$. На функцию f и множества P и Q накладываем обычные условия. Условие седловой точки в маленькой игре в настоящем разделе не накладывается.

Ставится задача (для первого игрока) наведения на цилиндрическое множество $[0, \vartheta] \times F$ внутри множества N. Такая игра носит название игра "к моменту". Этой задаче будет сопоставлена эквивалентная задача "в момент". *Эквивалентность* будет пониматься в смысле совпадения множеств успешной разрешимости задач наведения.

Для того, чтобы построить эквивалентную игру "в момент", мы расширяем возможности первого игрока, формирующего управление u, введя дополнительное управление u_0, принимающее значение 0 или 1. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему

$$\dot{x} = u_0 \cdot f(x, u, v), \ x \in \mathbb{R}^n, \ u_0 \in \{0, 1\}, \ u \in P, \ v \in Q \tag{2.4.2}$$

на промежутке $[0, \vartheta]$. В новой системе (2.4.2) первый игрок распоряжается управлениями u_0 и u, а второй игрок, как и в системе (2.4.1), управлением v.

Поставим задачу наведения на множество $\{\vartheta\} \times F$ внутри множества N. Подобная задача является задачей наведения "в момент". Ниже мы докажем, что рассматриваемые задачи эквивалентны. Более того, будет доказано, что совпадают последовательности, построенные по одному из методов программных итераций (итерации стабильности). Напомним этот вариант метода программных итераций для рассматриваемых систем [90].

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений:

$$P^{(1)} \triangleq P,\ P^{(2)} \triangleq \{0,1\} \times P,$$

$$M^{(1)} \triangleq [0,\vartheta] \times F,\ M^{(2)} \triangleq \{\vartheta\} \times F;$$

для $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$, $u \in P^{(1)} = P$ положим

$$f^{(1)}(x,u,v) \triangleq f(x,u,v);$$

для $x \in \mathbb{R}^n$, $v \in Q$, $u \in P^{(2)}$, $u = (u_0, u')$, $u_0 \in \{0,1\}$, $u' \in P$ положим

$$f^{(2)}(x,u,v) \triangleq u_0 f(x,u',v).$$

Также обозначаем через $\mathfrak{W}^{(1)}$ множество успешной разрешимости задачи наведения системы (2.4.1) на $[0,\vartheta] \times F$ внутри N, через $\mathfrak{W}^{(2)}$ множество успешной разрешимости задачи наведения системы (2.4.2) на $\{\vartheta\} \times F$ внутри N.

В этом параграфе мы параллельно рассматриваем метод программных итераций для обеих систем. Пространства обобщенных управлений, v-системы мы будем снабжать индексом, соответствующем номеру системы. Именно, для фиксированного $v \in Q$ мы рассмотрим управляемые v-системы:

$$\dot{x} = f_v^{(i)}(x,u) \triangleq f^{(i)}(x,u,v),\ x \in \mathbb{R}^n,\ u \in P^{(i)}$$

на промежутке времени $[0,\vartheta]$, $(i = 1,2)$. Обозначаем через $\mathcal{R}_{t_*}^{(i)}$ множество всех обобщенных программных управлений первого игрока в i-й системе на промежутке времени $[t_*,\vartheta]$ – множество всех мер $[t_*,\vartheta] \times P^{(i)}$, согласованных с мерой Лебега на $[t_*,\vartheta]$. Для каждого обобщенного программного управления $\mu^{(i)} \in \mathcal{R}^{(i)}_{t_*}$ и позиции (t_*, x_*) существует единственное решение уравнения

$$x(t) = x_* + \int_{[t_*,t]\times P^{(i)}} f^{(i)}_v(x(\tau), u)\mu^{(i)}(d(\tau, u)).$$

Обозначим это решение через $\varphi^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v)$.

Мы используем вариант метода программных итераций – итерации стабильности (в общем случае см. (1.3.2)). Для замкнутого множества $E \subset [0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, положим

$$\begin{aligned} A^{(i)}_v(E) \triangleq \{(t_*, x_*) \in E : \exists \mu^{(i)} \in \mathcal{R}^{(i)}_{t_*}\ \exists \tau \in [t_*, \vartheta] :& \\ (\varphi^{(i)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v) \in M^{(i)}[\tau])\ \&& \\ (\varphi^{(i)}(t, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v) \in E[t]\ \forall t \in [t_*, \tau])\}.& \end{aligned}$$

Также обозначим через $A^{(i)}$ оператор программного поглощения в i-й системе,

$$A^{(i)}(E) \triangleq \bigcap_{v\in Q} A^{(i)}_v(E).$$

Построим последовательности множеств, аналогичные последовательности (1.3.7):

$$W^{(i)}_0 \triangleq N,\ W^{(i)}_k = A^{(i)}(W^{(i)}_{k-1})\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$\mathfrak{W}^{(i)} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} W^{(i)}. \tag{2.4.3}$$

Следующее утверждение является основным утверждением данного раздела. В нем рассматривается эквивалентность задачи наведения для системы (2.4.1) на множество $[0, \vartheta] \times F$ и задачи наведения для системы (2.4.2) на множество $\{\vartheta\} \times F$.

Теорема 3. *Пусть N является невозрастающим по сечениям множеством. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $W^{(1)}_k = W^{(2)}_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$;

2. *задача наведения системы (2.4.1) на цилиндрическое множество* $[0, \vartheta] \times F$ *эквивалентна задаче наведения системы (2.4.2) на множество* $\{\vartheta\} \times F$*;*

3. *если система (2.4.1) удовлетворяет условию Айзекса, то и система (2.4.2) также удовлетворяет условию Айзекса.*

Таким образом даже линейная игра “к моменту” эквивалентна билинейной игре “в момент”.

Замечание 1. Если исходная система удовлетворяет условию Айзекса, то может быть определены гамильтонианы игр

$$H^{(i)}(x, s) \triangleq \max_{v \in Q} \min_{u \in P^{(i)}} \langle s, f^{(i)}(x, u, v)\rangle = \min_{u \in P^{(i)}} \max_{v \in Q} \langle s, f^{(i)}(x, u, v)\rangle.$$

Из доказательства пункта 3 следует, что

$$H^{(2)}(x, s) = \min\{0, H^{(1)}(x, s)\}.$$

Таким образом, $H^{(2)}(x, s) \leq 0 \ \forall s, x \in \mathbb{R}^n$. Из следствия 3 получаем, что максимальный стабильный мост в задаче наведения на цилиндрическое множество для автономной системы есть множество невозрастающее по сечениям. Также согласно следствию 4 его сечения непрерывно зависят от времени и являются связными множествами в случае связности F.

Также полученный результат может быть применен к изучению игр с ограничением на количество переключений управления второго игрока (в промежутках между переключениями управление второго игрока предполагается постоянным). Второй игрок распоряжается назначением момента переключения управления и самим управлением после переключения. Предполагается, что момент переключения выбирается на основе непрерывно поступающей информации о реализовавшейся траектории [90]–[92]. При этом предполагается, что первый игрок выбирает свое управление в классе контрстратегий. В случае если число переключений ограничено числом k имеет место альтернативное разбиение пространства позиций [92] и множество успешной разрешимости задачи уклонения в этом случае есть множество N без $k+1$ итерации посторoенной по описанному методу программных итераций [92]. Таким образом из теоремы следует, что совпадают множества успешной разрешимости задачи уклонения от $[0,\vartheta] \times F$ для системы (2.4.1) и от $\{\vartheta\} \times F$ для системы (2.4.2) при одинаковом ограничении на количество переключений управления второго игрока.

Вернемся теперь к играм без ограничения на количество переключений управлений второго игрока. Понятие эквивалентности естественным образом распространяется на игры в которых игроки стремятся минимизировать/максимизировать функционал платы. Игры с функционалом платы мы будем рассматривать на всем множестве позиций $[0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$. В этом случае будем называть две игры эквивалентными, если у них совпадают функции цены.

Следствие 6. *Пусть динамика системы описывается уравнением (2.4.1) и первый (второй) игрок стремится минимизировать (максимизировать) функционал платы вида* $\min_{t\in[0,\vartheta]}\omega(x(t))$ *(предполагается, что функция* ω *непрерывна). Тогда эта дифференциальная игра эквивалентна игре, в которой динамика системы описывается уравнением (2.4.2), с функционалом платы* $\omega(x(\vartheta))$.

Отметим, что способы преобразования системы, аналогичные используемым в настоящем разделе, рассматривались ранее в классе программных управлений (см. [136], [13]). В работе [136] получен следующий результат. Если рассмотреть задачу наведения без фазовых ограничений для системы (2.4.1) на множество $\{(t,x) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n : \omega(x) \leq 0\}$ (функция $\omega : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ предполагается ограниченной и липшицевой), то множество успешной разрешимости будет равно $\{(t,x) \in [0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n : \varphi(t,x) \le 0\}$, где $\varphi(\cdot,\cdot)$ – вязкостное решение уравнения Гамильтона-Якоби с гамильтонианом, равным $\min\{0, H(x,s)\}$, и краевым условием $\varphi(\vartheta,x) = \omega(x)$. Это утверждение также может быть получено из [71] и результатов настоящего раздела. В работе [13] расширение системы используется в доказательстве принципа максимума Л.С.Понтрягина в задаче с нефиксированным временем окончания.

2.4.2 Некоторые свойства операторов программного поглощения для автономных систем

В этом параграфе, мы предполагаем, что выбрано и зафиксировано множество $F \subset \mathbb{R}^n$. Мы рассматриваем для системы (2.4.1) задачу наведения на множество $[0,\vartheta] \times F$ внутри N, для системы (2.4.2) задачу заведения на множество $\{\vartheta\} \times F$ внутри N. Операторы итераций стабильности для i-й задачи обозначаем через $A^{(i)}$. Предполагается, что выполнены условия теоремы 3.

Лемма 2. *Если E – невозрастающее по сечениям замкнутое множество такое, что $[0,\vartheta] \times F \subset E$, то и $A^{(2)}(E)$ невозрастающее по сечениям множество такое, что $[0,\vartheta] \times F \subset A^{(2)}(E)$.*

Доказательство. Пусть $(t^*, x_*) \in A^{(2)}(E)$. Докажем, что $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$ для $t_* \le t^*$. Зафиксируем $v \in Q$. Существует $\mu \in \mathcal{R}^{(2)}_{t^*}$ такое, что $\varphi^{(2)}(\vartheta, t^*, x_*, \mu, v) \in F$ и $\varphi^{(2)}(t, t^*, x_*, \mu, v) \in E[t]$ для всех $t \in [t^*, \vartheta]$.

Определим обобщенное управление σ во второй системе, соответствующее обычному управлению $u_0 = 0$. Пусть $\hat{u} = (0, u_1, \dots u_p)$, где $(u_1, \dots u_p)$ – произвольный элемент P. Положим для каждого измеримого множества вида $\Gamma \times \Lambda_{P^{(2)}}$ $(\Gamma \subset \mathcal{T}_t,\ \Lambda_{P^{(2)}} \subset \Sigma_{P^{(2)}})$

$$\sigma(\Gamma \times \Lambda_{P^{(2)}}) \triangleq \int_{\Gamma} \mathbf{1}_{\Lambda_{P^{(2)}}}(\hat{u})\lambda(dt). \tag{2.4.4}$$

Мера σ может быть продолжена на всю σ-алгебру борелевских подмножеств $[0,\vartheta] \times P^{(2)}$ [83].

Определим меру $\hat{\mu}$ на $[t_*,\vartheta] \times P^{(2)}$ по правилу: каждому измеримому $R \subset [t_*,\vartheta] \times P^{(2)}$ сопоставим

$$\hat{\mu}(R) \triangleq \sigma(R \cap ([t_*,t^*) \times P^{(2)})) + \mu(R \cap ([t^*,\vartheta] \times P^{(2)})).$$

Заметим, что $\varphi^{(2)}(t,t_*,x_*,\hat{\mu},v) = x_*$ при $t \in [t_*,t^*]$, и $\varphi^{(2)}(t,t_*,x_*,\hat{\mu},v) = \varphi^{(2)}(t,t^*,x_*,\mu,v)$ при $t \in [t^*,\vartheta]$. Следовательно,

$$\varphi^{(2)}(\vartheta,t_*,x_*,\hat{\mu},v) = \varphi^{(2)}(\vartheta,t^*,x_*,\mu,v) \in F,$$

$$\varphi^{(2)}(t,t_*,x_*,\hat{\mu},v) = \varphi^{(2)}(t,t^*,x_*,\mu,v) \in E[t] \text{ для } t \in [t^*,\vartheta] \text{ и}$$

$$\varphi^{(2)}(t,t_*,x_*,\hat{\mu},v) = x_* \in E[t^*] \subset E[t] \text{ для } t \in [t_*,t^*],$$

поскольку E невозрастает по сечениям. Таким образом, $(t_*,x_*) \in A_v^{(2)}(E)$ для каждого $v \in Q$. Отсюда имеем, что $(t_*,x_*) \in A^{(2)}(E)$.

Также, если $[0,\vartheta] \times F \subset E$, то и $[0,\vartheta] \times F \subset A^{(2)}(E)$. В самом деле, если $(t_*,x_*) \in [0,\vartheta] \times F$, то для любого $v \in Q$ $\varphi^{(2)}(t,t_*,x_*,\sigma,v) = x_* \in F \subset E[t]$. □

Кроме обобщенных управлений введем и программные управления в i-й системе v-системе на отрезке $[t_*,\vartheta]$ – измеримые функции

$$\mathbf{u}^{(i)} : [t_*,\vartheta] \to P^{(i)}.$$

Для каждого программного управления $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ и позиции (t_*,x_*) существует единственное решение каждого из уравнений

$$\dot{x}(t) = f_v^{(i)}(x,\mathbf{u}^{(i)}(t))$$

с начальными данными $x(t_*) = x_*$. Обозначим это решение через $x^{(i)}(\cdot, t_*, x_* \mathbf{u}^{(i)}(\cdot), v)$. Как отмечалось выше, множество обычных программных управлений вкладывается во множество обобщенных программных управлений оператором ставящим в соответствие $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ обобщенное управление $\mu^{(i)}_{\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)}$, определенное на множествах вида $\Gamma \times \Lambda_P$ ($\Gamma \subset \mathcal{T}_0$, $\Lambda_P \subset \Sigma_P$) по правилу:

$$\mu^{(i)}_{\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)}(\Gamma \times \Lambda_P) \triangleq \int_\Gamma \mathbf{1}_{\Lambda_P}(\mathbf{u}^{(i)}(\xi))d\xi.$$

Из правила экстремального сдвига следует, что для всякого обобщенного управления $\mu^{(i)} \in \mathcal{R}^{(i)}_{t_*}$ и любой позиции (t_*, x_*) существует последовательность кусочно-постоянных непрерывных справа программных управлений $\mathbf{u}^{(i)}_k(\cdot)$ такая, что $x^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(i)}_k(\cdot), v)$ сходится к $\varphi^{(i)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(i)}, v)$ равномерно на $[t_*, \vartheta]$ [32].

Пусть $u \in P^{(i)}$ $(i = 1, 2)$, $v \in Q$, $\tau \geq 0$, обозначим через $S^{(i),\tau}_{u,v}(x)$ отображение сдвига за время τ по траектории, выходящей из позиции $(0, x)$, порожденной постоянными управлениями u и v в i-й системе,

$$S^{(i),\tau}_{u,v}(x) \triangleq x^{(i)}(\tau, 0, x, u, v).$$

Поскольку рассматриваемые системы, автономны имеем, что

$$S^{(i),\tau}_{u,v}(x) = x^{(i)}(\tau + t, t, x, u, v) \; \forall t \in [0, +\infty).$$

Заметим, что для всех $v \in Q$, $\tau > 0$ справедливы следующие свойства:

S1. если $u \in P^{(2)}$ и $u = (0, u_1, \ldots, u_p)$, то

$$S^{(2),\tau}_{u,v} = I,$$

где I – тождественное отображение на $\mathbb{R}^n$;

S2. если $u \in P^{(2)}$ и $u = (1, u_1, \ldots, u_p)$, то

$$S^{(2),\tau}_{u,v} = S^{(1),\tau}_{u',v},$$

где $u' \triangleq (u_1, \ldots, u_p) \in P^{(1)}$.

Зафиксируем $v \in Q$. Пусть $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ – некоторое кусочно-постоянная, непрерывная справа функция из $[t_*, t^*]$ в $P^{(i)}$. Обозначим через Δ набор положительных чисел $\{\delta^k\}_{k=1}^m$ таких, что если $\zeta^0 = t_*$, $\zeta^k = \zeta^{k-1} + \delta^k$, $k = \overline{1,m}$, $\zeta^m = t^*$, то значение $\mathbf{u}^{(i)}(\cdot)$ на $[\zeta^{k-1}, \zeta^k)$ постоянно и равно u^k. В этом случае для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$x^{(i)}(t^*, t_*, x_0, \mathbf{u}^{(i)}(\cdot), v) = S^{(i),\delta^m}_{u^m,v} \circ \ldots \circ S^{(i),\delta^1}_{u^1,v}(x_0). \tag{2.4.5}$$

Далее будем рассматривать некоторое кусочно постоянное, непрерывное справа управление во второй системе $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot)$. Как и в общем случае, через $\Delta = \{\delta^k\}_{k=1}^m$ обозначаем набор положительных чисел таких, что если $\zeta^0 = t_*$, $\zeta^k = \zeta^{k-1} + \delta^k$, $k = \overline{1,m}$, и $\zeta^m = \vartheta$, то $\mathbf{u}^{(2)}(t) = u^k = (u_0^k, u_1^k, \ldots, u_p^k)$, $t \in [\zeta^{k-1}, \zeta^k)$, $k = \overline{1,m}$.

Построим управление по заданной функции $\mathbf{u}^{(2)}$ в первой системе следующим образом. Выберем те номера k_j, для которых $u_0^{k_j} = 1$, в результате мы получим набор номеров:

$$J \triangleq \{k \in \Delta : u_0^k = 1\} = \{k_1, \ldots, k_r\}.$$

Пусть,

$$\gamma^0 = t_*,\ \gamma^j = \gamma^{j-1} + \delta^{k_j},\ j = \overline{1,r}.$$

Обозначим

$$\tau \triangleq \gamma^r. \tag{2.4.6}$$

Определим функцию

$$\mathbf{u}^{(1)}(t) \triangleq \begin{cases} (u_1^{k_j}, \ldots, u_p^{k_j}), & t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j),\ j = \overline{1,r} \\ \tilde{u}, & t \in [\tau, \vartheta], \end{cases} \tag{2.4.7}$$

где $\tilde{u}$ – произвольный элемент P. Обозначим $\varkappa^j \triangleq (u_1^{k_j}, \ldots, u_p^{k_j})$.

Определим отображение $\theta(\cdot) : [t_*, \tau] \to [t_*, \vartheta]$ по правилу:

$$\theta(t) \triangleq \zeta^{k_j - 1} + (t - \gamma^{j-1}),\ \text{при } t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j),\ \theta(\tau) \triangleq \vartheta. \tag{2.4.8}$$

Отображение θ "добавляет" те промежутки времени, которые были вырезаны при определении $\mathbf{u}^{(1)}$.

Справедлива следующая

Лемма 3. *Для всех $v \in Q$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $t_* \in [0, \vartheta]$ и кусочно-постоянных непрерывных справа функций $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot) : [t_*, \vartheta] \to P^{(2)}$ справедливо равенство*

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(1)}(\cdot), v) = x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) \ \forall t \in [t_*, \tau]. \qquad (2.4.9)$$

Здесь функция $\mathbf{u}^{(1)}(\cdot)$ определена в (2.4.7), функция $\theta(\cdot)$ определена в (2.4.8).

Доказательство. Зафиксируем $t \in [t_*, \tau)$. Существует j такое, что $t \in [\gamma^{j-1}, \gamma^j)$. Следовательно (см. (2.4.8)), $\theta(t) \in [\zeta^{k_j - 1}, \zeta^{k_j})$. Управление $\mathbf{u}^{(2)}(\cdot)$ постоянно на полуинтервалах $[\zeta^{l-1}, \zeta^l)$, $l = \overline{1, k_j - 1}$ и полуинтервале $[\zeta^{k_j - 1}, \theta(t))$. Тогда имеем (см. (2.4.5) для $i = 2$), что

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S^{(2), \theta(t) - \zeta^{k_j - 1}}_{u^{k_j}, v} \circ S^{(2), \delta^{k_j - 1}}_{u^{k_j - 1}, v} \circ \ldots \circ S^{(2), \delta^1}_{u^1, v}(x_*).$$

Имеем (см. свойство S1), что $S^{(2), \delta^l}_{u^l, v} = I$ для всех $l \notin J$. Отсюда получаем, что

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S^{(2), \theta(t) - \zeta^{k_j - 1}}_{u^{k_j}, v} \circ S^{(2), \delta^{k_{j-1}}}_{u^{k_{j-1}}, v} \circ \ldots \circ S^{(2), \delta^{k_1}}_{u^{k_1}, v}(x_*).$$

Поскольку $u^{k_j} = (1, u_1^{k_j}, \ldots, u_p^{k_j})$ из свойства S2 следует, что

$$x^{(2)}(\theta(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S^{(1), t - \gamma^{j-1}}_{\varkappa^j, v} \circ S^{(1), \delta^{k_{j-1}}}_{\varkappa^{j-1}, v} \circ \ldots \circ S^{(1), \delta^{k_1}}_{\varkappa^1, v}(x_*).$$

Здесь мы воспользовались равенством $\theta(t) - \zeta^{k_j - 1} = t - \gamma^{j-1}$ (см. (2.4.8)). Из (2.4.5) для $i = 1$ получаем, что

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(1)}(\cdot), v) = S^{(1), t - \gamma^{j-1}}_{\varkappa^j, v} \circ S^{(1), \delta^{k_{j-1}}}_{\varkappa^{j-1}, v} \circ \ldots \circ S^{(1), \delta^{k_1}}_{\varkappa^1, v}(x_*).$$

Таким образом, получаем, что (2.4.9) выполнено при $t \in [t_*, \tau)$.

Если $t = \tau$, то имеем, что

$$x^{(2)}(\vartheta, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v) = S^{(2),\delta_m}_{u^{k_m},v} \circ S^{(2),\delta^{k_m-1}}_{u^{k_m-1},v} \circ \ldots \circ S^{(2),\delta^1}_{u^1,v}(x_*).$$

С использованием свойств S1 и S2, также как в случае $t \in [t_*, \tau)$ получаем, что (2.4.9) выполнено при $t = \tau$.

$\square$

Сравним теперь образы двух рассматриваемых операторов программного поглощения.

Лемма 4. *Пусть E – замкнутое множество, невозрастающее по сечениям, $[0, \vartheta] \times F \subset E$. Тогда $A^{(1)}(E) = A^{(2)}(E)$.*

Доказательство. Докажем вначале вложение $A^{(1)}(E) \subset A^{(2)}(E)$. Пусть $(t_*, x_*) \in A^{(1)}(E)$. Тогда для каждого $v \in Q$ существует обобщенное управление $\mu^{(1)} \in \mathcal{R}^{(1)}_{t_*}$ со свойством: существует $\tau \in [t_*, \vartheta]$, что $\varphi^{(1)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \in F$ и $\varphi^{(1)}(t, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \in E[t]$ для $t \in [t_*, \tau]$. Определим $\mu^{(2)} \in \mathcal{R}^{(2)}_{t_*}$ следующим образом: если $R \subset [t_*, \vartheta] \times P^{(2)} = [t_*, \vartheta] \times \{0, 1\} \times P$

$$\mu^{(2)}(R) \triangleq \mu^{(1)}(\{(t, u') : t \in [t_*, \tau],\ u' \in P,\ (t, 1, u') \in R\}) + \\ + \sigma(R \cap ((\tau, \vartheta] \times \{0, 1\} \times P)).$$

Мера σ определена в доказательстве леммы 2 (см. (2.4.4)).

Заметим, что

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) = \varphi^{(1)}(t, t_*, x_*, \mu^{(1)}, v) \text{ при } t \in [t_*, \tau] \text{ и}$$

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) = \varphi^{(2)}(\tau, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) \in F \text{ при } t \in [\tau, \vartheta].$$

Следовательно, поскольку $F \subset E[t]$, $t \in [0, \vartheta]$, имеем

$$(t_*, x_*) \in A^{(2)}_v(E).$$

В силу произвольности v имеем, что $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$ для всех $(t_*, x_*) \in A^{(1)}(E)$.

Теперь докажем обратное вложение. Пусть $(t_*, x_*) \in A^{(2)}(E)$. Следовательно, для каждого $v \in Q$ существует $\mu^{(2)} \in \mathcal{R}^{(2)}_{t_*}$ со свойством: $\varphi^{(2)}(\vartheta, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) \in F$ и $\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) \in E[t]$ для всех $t \in [t_*, \vartheta]$. Пусть $\{\mathbf{u}^{(2)}_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность кусочно-постоянных программных управлений такая, что последовательность траекторий $x^{(2)}(\cdot, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}(\cdot), v)$ сходится к $\varphi^{(2)}(\cdot, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v)$. Для каждого k определены моменты τ_k и функции $\mathbf{u}^{(1)}_k(\cdot)$, $\theta_k(\cdot)$ (см. (2.4.6), (2.4.7), (2.4.8)). По определению функций $\theta_k(\cdot)$ и лемме 3,

$$x^{(1)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(1)}_k(\cdot), v) = x^{(2)}(\theta_k(t), t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}_k(\cdot), v),\ t \in [t_*, \tau_k], \tag{2.4.10}$$

при этом

$$\theta_k(\tau_k) = \vartheta. \tag{2.4.11}$$

Пусть,

$$\varepsilon_k \triangleq \max_{t \in [t_*, \vartheta]} \|x^{(2)}(t, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}_k(\cdot), v) - \varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v)\|. \tag{2.4.12}$$

Из (2.4.10), (2.4.11) и построения функций $x^{(2)}(\cdot, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(2)}_k(\cdot), v)$ следует, что

$$\varepsilon_k \to 0,\ k \to \infty. \tag{2.4.13}$$

Поскольку

$$\varphi^{(2)}(\vartheta, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) \in F,$$

$$\varphi^{(2)}(t, t_*, x_*, \mu^{(2)}, v) \in E[t]\ \forall t \in [t_*, \vartheta],$$

и E множество, невозрастающее по сечениям, такое, что $F \subset E[t]$ для всех $t \in [0, \vartheta]$, имеем,

$$d(x^{(1)}(\tau_k, t_*, x_*, \mathbf{u}^{(1)}_k(\cdot), v), F) \leq \varepsilon_k, \tag{2.4.14}$$

$$d(x^{(1)}(t,t_*,x_*,\mathbf{u}_k^{(1)}(\cdot),v),E[t]) \le \varepsilon_k \ ,t \in [t_*,\tau_k]. \tag{2.4.15}$$

Здесь $d(x,B)$ – расстояние от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до замкнутого множества $B \subset \mathbb{R}^n$

Существует последовательность $\{k_l\}_{l=1}^{\infty}$ и $\hat{\tau} \in [t_*,\vartheta]$, что $\{\tau_{k_l}\}$ сходится к $\hat{\tau}$. Без ограничения общности можно считать, что $\{\tau_k\}$ само сходится к $\hat{\tau}$. Обозначим через $\mu^{(1)}$ – слабый предел некоторой подпоследовательности последовательности $\mu^{(1)}_{\mathbf{u}_k^{(1)}}$. Из (2.4.10), (2.4.12) (2.4.13), (2.4.14) и (2.4.15) следуют вложения:

$$\varphi^{(1)}(\hat{\tau},t_*,x_*,\mu^{(1)},v) \in F, \text{ и}$$

$$\varphi^{(1)}(\hat{\tau},t_*,x_*,\mu^{(1)},v) \in E[t],\ t \in [t_*,\hat{\tau}].$$

Следовательно, $(t_*,x_*) \in A_v^{(1)}(E)$. Поскольку выбор $v \in Q$ был произвольным, имеем, $(t_*,x_*) \in A^{(1)}(E)$ для всех $(t_*,x_*) \in A^{(2)}(E)$. □

2.4.3 Свойства преобразованной задачи

В этом разделе мы дадим доказательства теоремы 3 и следствия 6. Утверждение 1 теоремы следует из лемм 2 и 4 в силу условий: N – множество невозрастающее по сечениям, $[0,\vartheta] \times F \subset N$. Утверждение 2 теоремы следует из предыдущего в силу (2.4.3).

Доказательство утверждения 3 теоремы. По условию для всех $s,x \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s,f(x,u,v)\rangle = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle s,f(x,u,v)\rangle. \tag{2.4.16}$$

Докажем, что

$$\max_{v\in Q}\min_{u_0\in\{0,1\},u\in P}\langle s,u_0 f(x,u,v)\rangle = \min_{u_0\in\{0,1\},u\in P}\max_{v\in Q}\langle s,u_0 f(x,u,v)\rangle. \tag{2.4.17}$$

Вначале рассмотрим случай, когда

$$\max_{v\in Q}\min_{u\in P}\langle s,f(x,u,v)\rangle \le 0,$$

тогда для всех $v \in Q$

$$\min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \leq 0,$$

откуда для всех $v \in Q$

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, , u, v) \rangle = \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle.$$

Следовательно,

$$\max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, , u, v) \rangle = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle. \tag{2.4.18}$$

$$\max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = \begin{cases} 0, & u_0 = 0; \\ \max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle, & u_0 = 1. \end{cases} \tag{2.4.19}$$

С учетом условия неположительности $\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle$ получаем, что

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle. \tag{2.4.20}$$

Следовательно, для случая $\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \leq 0$ равенство (2.4.17) следует из (2.4.19) и (2.4.20).

Пусть теперь

$$\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \geq 0.$$

Для тех v для которых $\min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \geq 0$

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = 0.$$

Отсюда имеем,

$$\max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = 0.$$

Также для всех $u \in P$ $\max_{v \in Q} \langle s, f(x, u, v) \rangle \geq 0$. Из представления (2.4.19) получаем, что

$$\min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle = 0 = \max_{v \in Q} \min_{u_0 \in \{0,1\}, u \in P} \langle s, u_0 f(x, u, v) \rangle.$$

Таким образом равенство (2.4.17) справедливо и для случая $\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle s, f(x, u, v) \rangle \geq 0$. □

Доказательство следствия. Для каждого $c > 0$ рассмотрим множество $F_c \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \omega(x) \leq c\}$. Тогда для каждого $c > 0$ задача наведения системы (2.4.1) на множество $[0, \vartheta] \times F_c$ эквивалентна задаче наведения системы (2.4.2) на множество $\{\vartheta\} \times F_c$.

Зафиксируем позицию (t_0, x_0) существует $\gamma = \gamma(t_0, x_0)$ – нижняя грань тех c при которых задача наведения (2.4.1) на $[0, \vartheta] \times F_c$ разрешима. Из эквивалентности задачи наведения системы (2.4.1) на множество $[0, \vartheta] \times F_c$ и задачи наведения системы (2.4.2) на множество $\{\vartheta\} \times F_c$ следует, что γ – нижняя грань тех c при которых задача наведения (2.4.2) на $\{\vartheta\} \times F_c$ разрешима. Отсюда имеем, что функции цены в обоих задачах совпадают.

$\square$

Глава 3

Характер сходимости метода программных итераций и аналоги метода экстремального сдвига

3.1 Характер сходимости процедур на основе метода программных итераций

Настоящий раздел, как и последующие посвящен случаю, когда целевое множество M непусто и компактно, как и в общем случае предполагается, что $M \subset N$. Основные результаты этого разделы сформулированы в нижеследующих утверждениях, которые опубликованы в совместных с А.Г. Ченцовым работах [2]–[6], [108].

Теорема 4. *Справедливы утверждения:*

1. $\mathfrak{W}$, W_k, $\mathcal{W}_k$ *компакты для* $k \in \mathbb{N}$;

2. $\mathbf{H}(W_k, \mathfrak{W}) \to 0$, $k \to \infty$;

3. $\mathbf{H}(\mathcal{W}_k, \mathfrak{W}) \to 0$, $k \to \infty$.

Следствие 7. *Пусть зафиксировано* $t \in [t_0, \vartheta_0]$. *Тогда,*

1. *$\mathfrak{W}[t]$, $W_k[t]$, $\mathcal{W}_k[t]$ компакты для $k \in \mathbb{N}$;*

2. *если $W_k[t]$, $k \in \mathbb{N}$, непусты, то*

$$\mathbf{h}(W_k[t], \mathfrak{W}[t]) \to 0,\ \ k \to \infty;$$

3. *если $\mathcal{W}_k[t]$, $k \in \mathbb{N}$, непусты, то*

$$\mathbf{h}(\mathcal{W}_k[t], \mathfrak{W}[t]) \to 0,\ \ k \to \infty.$$

Доказательство этих утверждений основано на лемме, являющейся аналогом Леммы Гронуолла.

Лемма 5. *Предположим, что $\theta \in [t_0, \vartheta_0]$, $u(\cdot)$ есть непрерывная функция на промежутке $[\theta, \vartheta_0]$. Пусть для $t \in [\theta, \vartheta_0]$*

$$0 \leq u(t) \leq \delta + \int_t^{\vartheta_0} (\eta + Lu(\xi))d\xi, \tag{3.1.1}$$

тогда для $t \in [\theta, \vartheta_0]$ верно неравенство

$$u(t) \leq \frac{\eta}{L}(e^{L(\vartheta_0 - t)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0 - t)}. \tag{3.1.2}$$

Доказательство. Вначале мы докажем следующий факт: если для $t \in [\theta, \vartheta_0]$

$$0 \leq u(t) < \delta + \int_t^{\vartheta_0} (\eta + Lu(\xi))d\xi, \tag{3.1.3}$$

тогда для $t \in [\theta, \vartheta_0]$ верно неравенство

$$u(t) < \frac{\eta}{L}(e^{L(\vartheta_0 - t)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0 - t)}. \tag{3.1.4}$$

Очевидно, что неравенство (3.1.4) выполняется при $t = \vartheta_0$. Из непрерывности $u(\cdot)$ следует, что оно выполняется и на некотором полуинтервале $(\vartheta_1, \vartheta_0]$. Пусть τ наибольшая точка, меньшая ϑ_0, такая, что в ней неравенство (3.1.4) нарушается, то есть

$$u(\tau) = \frac{\eta}{L}(e^{L(\vartheta_0 - \tau)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0 - \tau)}. \tag{3.1.5}$$

Из (3.1.3) следует, что

$$u(\tau) < \delta + \int_{\tau}^{\vartheta_0} (\eta + Lu(\xi))d\xi \leq$$

$$\leq \delta + \int_{\tau}^{\vartheta_0} \left[\eta + L(\frac{\eta}{L}(e^{L(\vartheta_0-\xi)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0-\xi)})d\xi\right] =$$

$$= \delta + \frac{\eta}{L}e^{L(\vartheta_0-\xi)}\Big|_{\vartheta_0}^{\tau} + \delta e^{L(\vartheta_0-\xi)}\Big|_{\vartheta_0}^{\tau} =$$

$$= \frac{\eta}{L}(e^{L(\vartheta_0-\tau)} - 1) + \delta e^{L(\vartheta_0-\tau)}. \quad (3.1.6)$$

Сравнивая (3.1.6) и (3.1.5) получаем, что предположение о том, что неравенство (3.1.4) нарушается, неверно.

Из (3.1.1) следует, что для любого $t \in I$, $t \leq \vartheta_0$ верно неравенство

$$0 \leq u(t) < (\delta + \varepsilon) + \int_{t}^{\vartheta_0} (\eta + Lu(\xi))d\xi$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Из доказанного следует, что

$$u(t) < \frac{\eta}{L}(e^{L(\vartheta_0-t)} - 1) + (\delta + \varepsilon)e^{L(\vartheta_0-t)}$$

Так как ε произвольно, заключаем, что (3.1.2) верно.

$\square$

Доказательство теоремы 4. Докажем вначале, что множество W_1 ограничено. По определению метода программных итераций имеем,

$$W_1 = \{(t_*, x_*) \in N : \forall v \in Q : \ \exists \mu \in \mathcal{R}_{t_*} \exists \tau \in [t_*, \vartheta_0]$$
$$\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v) \in M[\tau] \ \& \ \varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v) \in N[t] \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]\}.$$

То есть имеем, что если $(t_*, x_*) \in W_1$, то для некоторых $v_* \in Q$ и меры $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$

$$\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v_*) =$$
$$= \varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v_*) + \int_{[t,\tau]\times P} f(\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \mu \odot v_*), u, v_*)\mu(d(\xi, u)).$$

Или тоже самое

$$\varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v_*) =$$
$$= \varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v_*) - \int_{[t,\tau]\times P} f(\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \mu \odot v_*), u, v_*)\mu(d(\xi, u)).$$

Отсюда имеем, что

$$\|\varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v_*)\| \leq$$
$$\leq \|\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v_*)\| + \int_{[t,\tau]\times P} \|f(\xi, \varphi(\xi, t_*, x_*, \mu \odot v_*), u, v_*)\|\mu(d(\xi, u)).$$

Воспользовавшись условием подлинейного роста (1.2.2) получаем, что

$$\|\varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v_*)\| \leq$$
$$\leq \|\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v_*)\| + \int_t^\tau \{\Xi + \Xi\|\varphi(\xi, t_*, x_*, \mu \odot v_*)\|\}d\xi. \quad (3.1.7)$$

Имеем, что неравенство (3.1.7) есть неравенство (3.1.3), где $u(\cdot) = \|\varphi(\cdot, t_*, x_*, \mu \odot v_*)\|$, $\delta = \varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v_*)$, $\eta = \Xi$, $L = \Xi$. Из Леммы 5 следует, что

$$\|\varphi(t, t_*, x_*, \mu \odot v_*)\| \leq (\varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v_*) + 1)e^{\Xi(\tau - t)} - 1. \quad (3.1.8)$$

Поскольку M – компакт в $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$, M ограничено в пространстве $[t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ с метрикой ρ. Отсюда следует, что существует a_0, со свойством $\|y\| \leq a_0$ для всех y таких, что $(\theta, y) \in M$ для некоторого $\theta \in [t_0, \vartheta_0]$. В силу того, что $(\tau, \varphi(\tau, t_*, x_*, \mu \odot v_*)) \in M$ из (3.1.8) для $t = t_*$ получаем, что если $(t_*, x_*) \in W_1$

$$\|x_*\| \leq (a_0 + 1) \exp \Xi(\vartheta_0 - t_0) - 1. \quad (3.1.9)$$

Обозначим теперь $a_1 = \max\{(a_0 + 1) \exp \Xi(\vartheta_0 - t_0) - 1, \vartheta_0 - t_0\}$. Тогда из (3.1.9) следует, что для всех $(t_*, x_*) \in W_1$ выполнено неравенство

$$\rho((t_*, x_*), (0, 0)) \leq a_1.$$

Таким образом, множество W_1 ограничено. Отсюда следует, что W_1 компакт. По определению оператора программного поглощения A имеем, что $W_k \subset W_1$, $k \in \mathbb{N}$, следовательно множества W_k ограничены. Также множества W_k замкнуты. Отсюда получаем, что W_k, $k \in \mathbb{N}$ компакты. Заметим, что множества W_k непусты, поскольку $M \subset W_k$. Аналогично $\mathcal{W}_k \subset W_1$, $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{W}_k$ замкнуты. Откуда следует компактность $\mathcal{W}_k$, $k \in \mathbb{N}$. Компактность $\mathfrak{W}$ получается аналогичным способом с использованием формулы (1.3.9). Таким образом пункт 1 доказан.

Пусть $D \subset [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$ компактное множество, $\varepsilon > 0$, обозначим

$$\mathbb{O}(D, \varepsilon) \triangleq \bigcup_{(t,x)\in D} O_\varepsilon((t, x)),$$

где

$$O_\varepsilon((t, x)) \triangleq \{(\tau, y) : \rho((\tau, y), (t, x)) \leq \varepsilon\}.$$

Из следствия 3.15 монографии [106] вытекает, что для каждого ε существует $m \in \mathbb{N}$, со свойством: для каждого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq m$, справедливо включение $W_k \subset \mathbb{O}(\mathfrak{W}, \varepsilon)$. Из этого включения и определения Хаусдорфовой метрики $\mathbf{H}$ (1.1.2) следует пункт 2. Аналогично доказывается пункт 3.

□

Доказательство следствия 7. Сечения замкнутого множества замкнуты, сечения ограниченного множества ограничены. Из этого следует пункт 1. Доказательства пунктов 2 и 3 полностью аналогичны доказательству пункта 2 теоремы 4. □

3.2 Аналог правила экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина

3.2.1 Формулировка основного результата

В настоящем разделе изучаются стратегии, экстремальные к множествам W_k и $\mathcal{W}_k$. Мы предполагаем, что условие седловой точки в маленькой игре (1.2.3) выполнено. Также считаем, что $N = [t_0, \vartheta_0] \times \mathbb{R}^n$. Стратегию экстремальную к множеству W_k обозначим через U_k (см. (1.2.12)), стратегию, экстремальную к $\mathcal{W}_k$ обозначим через $\mathcal{U}_k$. Если (t_*, x_*) – начальная позиция, Δ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, то как говорилось выше, через $X_\Delta[t_*, x_*, U]$ обозначается пучок ломаных Эйлера, порожденный позиционной стратегией U.

Теорема 5. *Пусть $\tau_* \in [t_0, \vartheta_0]$ такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$, и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$ $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$, удовлетворяющего условию $d(\Delta) \leq \delta$, существует $K \in \mathbb{N}$ со свойством: для любого $k > K$, любого $x_* \in \mathcal{W}_k[\tau_*]$ и всех $x[\cdot] \in X_\Delta[\tau_*, x_*, \mathcal{U}_k]$*

$$d(x[\vartheta], M[\vartheta]) \leq \varepsilon$$

для некоторого $\vartheta \in [t_0, \vartheta_0]$.

Аналогичная теорема справедлива и для случая прицеливания на множества W_k.

Теорема 6. *Пусть $\tau_* \in [t_0, \vartheta_0]$ такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$, и $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$ $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$, удовлетворяющего условию $d(\Delta) \leq \delta$, существует $K \in \mathbb{N}$ со свойством: для любого $k > K$, любого $x_* \in W_k[\tau_*]$ и всех $x[\cdot] \in X_\Delta[\tau_*, x_*, U_k]$*

$$d(x[\vartheta], M[\vartheta]) \leq \varepsilon$$

для некоторого $\vartheta \in [t_0, \vartheta_0]$.

3.2.2 Оценка расхождения при прицеливании на близкое множество на одном шаге

В настоящем параграфе мы получим оценку, являющуюся аналогом леммы Н. Н. Красовского и А. И. Субботина об оценке расстояния между движениями при экстремальном прицеливании одного движения на другое. Отличие от леммы в [40], [132] состоит в том, что направление прицеливания задается с ошибкой; размер ошибки задается величиной α. Рассматриваемое утверждение переходит в лемму Н.Н. Красовского и А.И. Субботина (см. [40]) при $\alpha = 0$. Утверждение рассматривается в случае наличия информационных помех, что дает возможность использовать ее в следующем разделе, где будет рассматриваться задача игрового управления при наличии информационных помех.

Лемма 6. *Пусть зафиксирована область $G \subset \mathbb{R}^n$. Пусть, также, $\alpha, \sigma \geq 0$, $x_*^{(1)}, x_0^{(1)}, x_*^{(2)}, z \in G$, $\|z\| \leq \alpha$, $\|x_0^{(1)} - x_*^{(1)}\| \leq \sigma$, $\tau^* \in [t_0, \vartheta_0]$, постоянные управления $\hat{u}$ и v^* выбраны из условий*

$$\max_{v \in Q} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)} + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v) \rangle = \\ = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)} + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v) \rangle, \quad (3.2.1)$$

$$\min_{u \in P} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x^{(1)}, u, v^*) \rangle = \\ = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x^{(1)}, u, v) \rangle. \quad (3.2.2)$$

Рассмотрим движения $x_0^{(1)}[t]$, $x_*^{(2)}(t)$ такие, что $x_0^{(1)}[\tau^*] = x_0^{(1)}$,

$$\dot{x}_0^{(1)}[t] = f(t, x_0^{(1)}[t], \hat{u}, v[t])$$

($v[\cdot]$– измеримое управление 2-го игрока, $v[t] \in Q$), $x_*^{(2)}(\tau^*) = x_*^{(2)}$,

$$\dot{x}_*^{(2)}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, x_*^{(2)}(t), u, v^*) : u \in P\}. \tag{3.2.3}$$

Обозначим

$$\rho(t) \triangleq \|x_0^{(1)}[t] - x_*^{(2)}(t)\|.$$

В этом случае существуют постоянные $\beta, M, M_1 > 0$ и функция $\varphi(\cdot)$ ($\varphi(\xi) \to 0$, при $\xi \to 0$) такие, что для любого $\delta > 0$

$$\rho^2(\tau^* + \delta) \leq \rho^2(\tau^*)(1 + \beta\delta) + (\varphi(\delta) + M\alpha + M_1\sigma)\delta. \tag{3.2.4}$$

Доказательство. Существует ограниченная область $G_1 \subset \mathbb{R}^n$ такая, что для всех $x' \in G$, $t' \in [t_0, \vartheta_0]$ решение, выходящее из (t', x'), не покидает G_1. Обозначим

$$K \triangleq \max\{\|f(t, x, u, v)\| : t \in [t_0, \vartheta_0], x \in G_1, u \in P, v \in Q\} < \infty.$$

Пусть $f^{(1)}[t] = f(t, x_0^{(1)}[t], \hat{u}, v[t])$, измеримая функция $f^{(2)}(t)$ такова, что $f^{(2)}(t) = \dot{x}_*^{(2)}(t) \in \mathrm{co}\{f(t, x_*^{(2)}(t), u, v^*) : u \in P\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
\rho^2(t) = \left\| x_0^{(1)} - x_*^{(2)} + \int_{\tau^*}^{t} [f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)] d\theta \right\|^2 = \\
= \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\|^2 + 2\left\langle x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, \int_{\tau^*}^{t} [f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)] d\theta \right\rangle + \\
+ \left\| \int_{\tau^*}^{t} [f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)] d\theta \right\|^2 \leq \\
\leq \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\|^2 + 2\int_{\tau^*}^{t} \langle x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta) \rangle d\theta + \\
+ \left[\int_{\tau^*}^{t} \|f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)\| d\theta \right]^2.
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Поскольку

$$\|f^{(1)}[\theta]\|, \ \|f^{(2)}[\theta]\| \leq K,$$

$$\rho^2(t) \le \rho^2(\tau^*) + 2\int_{\tau^*}^{t} \langle x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)\rangle d\theta + 4K^2(t-\tau^*)^2. \quad (3.2.6)$$

Оценим теперь $\langle x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)\rangle$.

По теореме Каратеодори вектор $f^{(2)}(t)$, который содержится в $\mathrm{co}\{f(t, x_*^{(2)}(t), u, v^*) : u \in P\}$, может быть представлен в виде

$$f^{(2)}(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_t^{(i)} f(t, x_*^{(2)}(t), u_t^{(i)}, v^*),$$

$$\text{где } \alpha_t^{(i)} \ge 0, \sum_{k=0}^{n} \alpha_t^{(i)} = 1, \quad u_t^{(i)} \in P.$$

Учитывая непрерывность функции f и локальную липшицевость по фазовой переменной, мы получаем, что

$$\begin{gathered} f^{(2)}[\theta] = \textstyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_\theta^{(i)} f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*) + \Delta f^{(2)}(\theta), \\ \|\Delta f^{(2)}(\theta)\| \le \Lambda \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\| + \Lambda \|x_0^{(1)} - x_*^{(1)}\| + \varphi^*(\theta - \tau^*). \end{gathered} \quad (3.2.7)$$

Здесь Λ – постоянная Липшица по x в области G_1, $\varphi^*(\cdot)$ – модуль непрерывности сужения функции f на компакт $[t_0, \vartheta_0] \times G_1 \times P \times Q$. Из равномерной непрерывности рассматриваемого сужения функции f следует, что

$$\lim_{\delta \to 0} \varphi^*(\delta) = 0.$$

Также, вектор $f^{(1)}[\theta]$ можно представить в виде

$$\begin{gathered} f^{(1)}[\theta] = f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) + \Delta f^{(1)}(\theta), \\ \|\Delta f^{(1)}(t)\| \le \varphi^*(\theta - \tau^*) + \Lambda \|x_0^{(1)} - x_*^{(1)}\|. \end{gathered} \quad (3.2.8)$$

Используя представления (3.2.7) и (3.2.8), получаем

$$\begin{aligned} &\langle x_0^{(1)} - x_*^{(2)}, f^{(1)}[\theta] - f^{(2)}(\theta)\rangle \le \\ &\quad \le \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_\theta^{(i)} f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*)\rangle + \\ &\quad + \Lambda \|x_0^{(1)}[\tau^*] - x_*^{(2)}(\tau^*)\|^2 + 2\varphi^*(\theta - \tau^*)\|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\| + \\ &\quad + 2\Lambda \|x_0^{(1)} - x_*^{(2)}\| \cdot \|x_0^{(1)} - x_*^{(1)}\|. \quad (3.2.9) \end{aligned}$$

Оценим

$$\langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_\theta^{(i)} f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*)\rangle.$$

Заметим, что

$$|\langle s + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v)\rangle - \langle s, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v)\rangle| \leq \alpha K \qquad (3.2.10)$$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \leq \alpha$, $\tau^* \in [t_0, \vartheta_0]$, $x_*^{(1)} \in G$, $u \in P$, $v \in Q$. Из определения $\hat{u}$ и v^* (см. (3.2.1) и (3.2.2)) следует, что

$$\begin{aligned}
\langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta])\rangle - \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*)\rangle \leq \\
\leq \max_{v \in Q} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)} + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v)\rangle - \\
- \min_{u \in P} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v^*)\rangle + \alpha K = \\
= \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)} + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v)\rangle - \\
\max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v)\rangle + \alpha K.
\end{aligned}$$

Из (3.2.10) следует, что

$$\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s + z, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v)\rangle - \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle s, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v)\rangle \ \leq \alpha K$$

для всех $s \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^n$, $\|z\| \leq \alpha$, $\tau^* \in [t_0, \vartheta_0]$, $x_*^{(1)} \in G$.

Из этого неравенства и условия седловой точки в маленькой игре (1.2.3) получаем, что

$$\begin{aligned}
\langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) - f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*)\rangle \leq \\
\min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v)\rangle - \\
- \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, u, v)\rangle + 2\alpha K = \\
= 2K\alpha. \quad (3.2.11)
\end{aligned}$$

Умножая i-е неравенство (3.2.11) на $\alpha_\theta^{(i)}$ и суммируя их по i, получаем

$$\langle x_*^{(1)} - x_*^{(2)}, f(\tau^*, x_*^{(1)}, \hat{u}, v[\theta]) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_\theta^{(i)} f(\tau^*, x_*^{(1)}, u_\theta^{(i)}, v^*)\rangle \leq 2K\alpha. \quad (3.2.12)$$

Таким образом, из (3.2.6), (3.2.9) и (3.2.12) имеем

$$\rho^2(t) \leq \rho^2(\tau^*)[1 + 2\Lambda(t-\tau^*)] + 4K\alpha(t-\tau^*) + [4\varphi^*(t-\tau^*)\mathrm{diam}(G) + \\ + 4K^2(t-\tau^*)](t-\tau^*) + 4\Lambda\cdot\mathrm{diam}(G)\cdot\sigma\cdot(t-\tau^*),$$

что эквивалентно (3.2.4), где $\beta = 2\Lambda$, $M = 4K$, $M_1 = 4\Lambda\mathrm{diam}(G)$, $\varphi(\xi) = [4\varphi^*(\xi)\mathrm{diam}(G) + 4K^2(\xi)]$. $\square$

3.2.3 Метод экстремального сдвига на множества-элементы последовательности, построенной по методу программных итераций

Пусть $k \in \mathbb{N}$, $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$ – конечное множество моментов времени из отрезка $[t_0, \vartheta_0]$ такое, что $\tau_j < \tau_{j+1}$. Обозначим

$$\delta \triangleq \max_{j=\overline{0,m-1}} (\tau_{j+1} - \tau_j),$$

$$\alpha = \sup_{j=\overline{0,m-1}} \mathbf{h}(\mathcal{W}_k[\tau_j], \mathfrak{W}[\tau_j]).$$

Пусть также $x_\Delta[t] \in X_\Delta[t_*, x_*, \mathcal{U}_k]$. Зафиксируем $j \in \overline{0, m-1}$. Если y_j – ближайший к $x_\Delta[\tau_j]$ элемент $\mathcal{W}_k[\tau_j]$, то через w_j обозначим ближайший к y_j элемент $\mathfrak{W}[\tau_j]$: $w_j \in \mathfrak{W}[\tau_j]$,

$$\|w_j - y_j\| = \min_{w \in \mathfrak{W}[\tau_j]} \|w - y_j\|.$$

Управление u_j выбирается из условия (3.2.1), где $z = w_j - y_j$, которое задает стратегию, экстремальную к множеству $\mathcal{W}_k$. На j-м шаге ($j = \overline{0, m-1}$) рассмотрим движение, определенное (3.2.3), где $x_*^{(1)} = x_j$, $x_*^{(2)} = w_j$; обозначим его $x_j(\cdot)$. Как видно это движение определено неоднозначно. Мы выбираем его так, чтобы $x_j(t) \in \mathfrak{W}[t]$, $t \in [\tau_j, \theta_j]$, где $\theta_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$ таково, что либо $x_j(\theta_j) \in M[\theta_j]$, либо $\theta_j = \tau_{j+1}$. Из u-стабильности множества $\mathfrak{W}$ следует, что по крайней мере одно такое движение существует. Обозначим через j^* наименьший номер j такой, что $x_j(\theta_j) \in M[\theta_j]$. Положим $\vartheta \triangleq \theta_{j^*}$. Обозначим, также,

$$\rho_{j,k}(t) \triangleq \begin{cases} \|x_\Delta[t] - x_j(t)\|, & t \in [t_0, \vartheta],\ j = \overline{0, j^*}; \\ \|x_\Delta[\vartheta] - x_{j^*}(\vartheta)\|, & t \in (\vartheta, \vartheta_0]. \end{cases} \tag{3.2.13}$$

Справедлива

Лемма 7. *Пусть $\alpha \leq 1$, тогда существует такая константа $R > 0$, что для $j = \overline{0, j^*}$*

$$\rho^2_{j,k}(t) \leq [\rho^2_{0,k}(\tau_0) + (t - \tau_0)(\varphi(\delta) + M\alpha) + jR\alpha] \exp \beta(t - \tau_0),\ t \in [\tau_j, \theta_j]. \tag{3.2.14}$$

Константы M, β и функция $\varphi(\cdot)$ определены в лемме 6.

Доказательство.

$$\rho^2_{j,k}(t) \leq [\rho^2_{j,k}(\tau_j) + (t - \tau_j)(\varphi(\delta) + M\alpha)] \exp \beta(t - \tau_j),\ t \in [\tau_j, \theta_j], \quad j = \overline{0, j^*}. \tag{3.2.15}$$

В самом деле, из леммы 6, примененной при $\sigma = 0$, следует неравенство

$$\rho^2_{j,k}(t) \leq \rho^2_{j,k}(\tau_j)(1 + \beta(t - \tau_j)) + (\varphi(\delta) + M\alpha)(t - \tau_j) \leq$$
$$\leq \rho^2_{j,k}(\tau_j) \exp \beta(t - \tau_j) + (t - \tau_j)(\varphi(\delta) + M\alpha) \exp \beta(t - \tau_j).$$

Пусть $j = \overline{0, j^* - 1}$. Найдем соотношение между $\rho_{j,k}(\tau_{j+1})$ и $\rho_{j+1,k}(\tau_{j+1})$. Поскольку $\mathfrak{W}[\tau_{j+1}] \subset \mathcal{W}_k[\tau_{j+1}]$,

$$\|x_\Delta[\tau_{j+1}] - y_{j+1}\| \leq \|x_\Delta[\tau_{j+1}] - x_j(\tau_{j+1})\| = \rho_{j,k}(\tau_{j+1}).$$

Следовательно,

$$\rho_{j+1,k}(\tau_{j+1}) = \|x_\Delta[\tau_{j+1}] - w_{j+1}\| \le$$
$$\le \|x_\Delta[\tau_{j+1}] - y_{j+1}\| + \|w_{j+1} - y_{j+1}\| \le$$
$$\le \rho_{j,k}(\tau_{j+1}) + \alpha.$$

Возводя это неравенство в квадрат, получаем, что при $\alpha \le 1$

$$\rho^2_{j+1,k}(\tau_{j+1}) \le \rho^2_{j,k}(\tau_{j+1}) + R\alpha, \tag{3.2.16}$$

где $R = 2\mathrm{diam}(G_1) + 1$. Область G строится как множество всех достижимых из начальной позиций, G_1 определяется по G в лемме 6.

Теперь докажем справедливость (3.2.14).

Доказательство проведем методом математической индукции по j. База индукции верна в силу (3.2.15). Пусть (3.2.14) верно для j, докажем неравенство для $j+1$. В силу (3.2.15), (3.2.16) и предположения индукции при $t \in [\tau_{j+1}, \theta_{j+1}]$ имеем цепочку неравенств

$$\rho^2_{j+1,k}(t) \le [\rho^2_{j,k}(\tau_j) + R\alpha + (t-\tau_j)(\varphi(\delta) + M\alpha)] \exp\beta(t-\tau_j) \le$$
$$\le \{[\rho^2_{0,k}(\tau_0) + (\tau_j - \tau_0)(\varphi(\delta) + M\alpha) + jR\alpha] \exp\beta(\tau_j - \tau_0) +$$
$$+ R\alpha + (t-\tau_j)(\varphi(\delta) + M\alpha)\} \exp\beta(t-\tau_j) \le$$
$$\le [\rho^2_{0,k}(\tau_0) + (t-\tau_0)(\varphi(\delta) + M\alpha) + (j+1)R\alpha] \exp\beta(t-\tau_0).$$

□

Теперь мы дадим

Доказательство теоремы 5. Пусть $x[\cdot] \in X_\Delta[t_*, x_*, \mathcal{U}_k]$. Заметим, что

$$d(x[\vartheta], M[\vartheta]) \le \rho_{j^*,k}(\vartheta), \text{ и}$$

$$d(x[t], \mathfrak{W}[t]) \le \rho_{j,k}(t),\ t \in [\tau_j, \theta_j],\ j = \overline{0, j^*}.$$

Здесь $\rho_{j,k}(t)$ определяется аналогично (3.2.13), с одним отличием: вместо $x_\Delta[\cdot]$ подставляется $x[\cdot]$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно подобрать $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$ $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$ со свойством $\tau_{j+1} - \tau_j \leq \delta$, существует номер K, что $\rho_{j,k}(t) < \varepsilon$ для всех $k \geq K$. Для этого мы воспользуемся оценкой (3.2.14). Поскольку по построению $\varphi(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varphi(\delta) < \frac{\varepsilon^2}{2(\vartheta_0 - \tau_*)\exp\beta(\vartheta_0 - \tau_*)}. \tag{3.2.17}$$

Пусть $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$ – разбиение отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$ со свойством $\tau_{j+1} - \tau_j < \delta$, $(j = \overline{0, m-1})$. Выберем $\alpha \in (0,1)$ такое, что

$$\alpha < \frac{\varepsilon^2}{2(1 + (\vartheta_0 - \tau_*)M + mR)\exp\beta(\vartheta_0 - \tau_*)}. \tag{3.2.18}$$

Для каждого j в силу пункта 3 следствия 7 существует номер L_j, что для любого $l > L_j$

$$\mathbf{h}(\mathfrak{W}[\tau_j], \mathcal{W}_l[\tau_j]) < \alpha.$$

Выберем

$$K \triangleq \max_{j=\overline{0,m-1}} L_k.$$

Следовательно, если $k > K$, начальная точка $x_0 \in \mathcal{W}_k[\tau_j]$ и прицеливание в моменты τ_j осуществляется на множества $\mathcal{W}_k[\tau_j]$, то из оценки (3.2.14) и выбора δ и α (см. (3.2.17) и (3.2.18)) следует оценка

$$\rho^2_{j,k}(t) \leq \varepsilon^2, \ t \in [\tau_j, \theta_j],$$

которая и заканчивает доказательство. □

Доказательство теоремы 6 полностью аналогично предыдущему.

3.3 Аналоги правила управления с поводырем Н.Н. Красовского и А.И. Субботина

3.3.1 Формулировка основного результата

В настоящем разделе мы рассматриваем аналог экстремальных стратегий управлений с поводырем, предложенных Н.Н. Красовским и А.И. Субботиным (см. [37], [40], [132]). Прицеливание будет проводиться на пару множеств. Пусть Y', Y'' – два множества, обладающих следующими свойствами:

1. $Y'' \subset Y'$;

2. для всякой позиции $(t_*, y_*) \in Y''$ и каждого $v \in Q$ существуют момент $\theta \in [t_*, \vartheta_0]$ и $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$ такие, что

$$\varphi(\theta, t_*, y_*, \mu \odot v) \in M[\theta]$$

   и

$$\varphi(t, t_*, y_*, \mu \odot v) \in Y'[t] \ \forall t \in [t_*, \vartheta_0]. \tag{3.3.1}$$

Как известно (см. [72]), стратегия по принципу управления с поводырем представляет собой тройку $\hat{U} = (U, \psi, \chi)$.

- Функция $U(t, x, w)$ – функция, которая формирует управление системой в момент времени t, при условии, что система находится в положении x, а поводырь в положении w;

- функция $\psi(t^*, t_*, x_*, w_*)$ – переходная функция поводыря, равная положению поводыря в момент t^* при условии того, что система и поводырь в момент времени t_* находятся соответственно в точках x_* и w_*;

- функция $\chi(t_0, x_0)$ – функция, равная начальному положению поводыря при условии, что система находится в положении (t_0, x_0).

В дальнейшем предполагается, что положение системы известно первому игроку неточно, и формируя управление первый игрок подставляет в функции U, ψ и χ не точное значение x, а приближенное – $\tilde{x}$, отличающееся от x на величину не превосходящую известный уровень помех σ: $\|x - \tilde{x}\| \leq \sigma$.

Определим теперь пошаговые движения (ломаные Эйлера). Пусть теперь, (t_*, x_*) – некоторая точка, $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^{m}$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, σ – уровень информационных помех. Положим $w_0 \triangleq \chi(t_*, \tilde{x}_*)$, где $\tilde{x}_*$ – некоторая точка, что $\|x_* - \tilde{x}_*\| \leq \sigma$. Если x_j, w_j – положение системы и поводыря в момент времени τ_j, $(j = \overline{0, m-1})$, то положим $u_j \triangleq U(\tau_j, \tilde{x}_j, w_j)$, ($\tilde{x}_j$ – некоторая точка такая, что $\|\tilde{x}_j - x_j\| \leq \sigma$). Ломаную Эйлера на отрезке времени $[\tau_j, \tau_{j+1}]$ определим, следуя [40], [132], как решение уравнения

$$x[t] = x_j + \int_{\tau_j}^{t} f(\xi, x[\xi], u_j, v[\xi]) d\xi. \tag{3.3.2}$$

Здесь $v[\cdot]$ – некоторое управление второго игрока. При этом положение поводыря в момент τ_{j+1} равно $w_{j+1} \triangleq \psi(\tau_{j+1}, \tau_j, \tilde{x}_j, w_j)$. Пучок ломаных Эйлера, определяемых стратегией по принципу управления с поводырем $\hat{U}$, выходящих из позиции (t_*, x_*), при наличии информационных помех уровня σ обозначим через $Z_\Delta[t_*, x_*, \sigma, \hat{U}]$.

Перейдем к определению стратегий по принципу управления с поводырем, экстремальных к паре множеств Y', Y''.

Для каждых $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, $x_* \in \mathbb{R}^n$, $w_* \in \mathbb{R}^n$ найдем u_*, v_* такие, что

$$\max_{v \in Q} \langle w_* - x_*, f(t_*, x_*, u_*, v) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v) \rangle, \tag{3.3.3}$$

$$\min_{u \in P} \langle w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v_*) \rangle = \min_{u \in P} \max_{v \in Q} \langle w_* - x_*, f(t_*, x_*, u, v) \rangle. \tag{3.3.4}$$

Положим

$$U(t_*, x_*, w_*) \triangleq u_*. \tag{3.3.5}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $w_* \in Y''[t_*]$. Для этого мы построим соответствующие начальную и переходную функции поводыря. По условию существует мера $\mu \in \mathcal{R}_{t_*}$, что включение (3.3.1) справедливо при $\theta_* = t_*$, $y_* = w_*$, $v = v_*$. Пусть $t^* \geq t_*$. Положим $y^* \triangleq \varphi(t^*, t_*, w_*, \mu \odot v_*)$. Пусть $w^* \in Y''[t^*]$ – ближайший к y^* элемент $Y''[t^*]$. Положим

$$\psi(t^*, t_*, x_*, w_*) \triangleq w^*. \tag{3.3.6}$$

Отметим, что в этом случае функция ψ не зависит от x_*. Наконец определим функцию $\chi(t_0, x_0)$ по следующему правилу: пусть $w_0 \in Y''[t_0]$ – ближайший к x_0 элемент $Y'[t_0]$, положим

$$\chi(t_0, x_0) \triangleq w_0. \tag{3.3.7}$$

Как видно из построения, положение поводыря в каждый момент времени лежат в сечении множества Y''. Отметим, что в описанной процедуре построения управления с поводырем функции U, ψ и χ определяются неоднозначно. Таким образом, мы получаем множество управлений с поводырем. Далее рассматривается некоторый элемент этого множества.

Стратегию управления с поводырем, экстремальную к паре множеств W_k, W_{k+1}, обозначим через $\hat{U}_k$, стратегию экстремальную к паре множеств $\mathcal{W}_k$ $\mathcal{W}_{k+1}$ через $\hat{\mathcal{U}}_k$.

Теорема 7. *Пусть $\tau_* \in [t_0, \vartheta_0]$ – такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $\zeta > 0$, $\delta > 0$ такие, что для любого разбиения $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$ отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$, удовлетворяющего условию $d(\Delta) \leq \delta$, существует $K \in \mathbb{N}$ со свойством: для любого $k > K$, любого $x_* \in \mathcal{W}_k[\tau_*]$ и всех $x[\cdot] \in Z_\Delta[\tau_*, x_*, \zeta, \hat{\mathcal{U}}_k]$*

$$d(x[\vartheta], M[\vartheta]) \leq \varepsilon$$

для некоторого $\vartheta \in [t_0, \vartheta_0]$.

Аналогичная теорема справедлива и для движений из $Z_\Delta[t_*, x_*, \sigma, \hat{U}_k]$.

Теорема 8. *Пусть $\tau_* \in [t_0, \vartheta_0]$ – такой момент времени, что $\mathfrak{W}[\tau_*] \neq \varnothing$ и $\varepsilon > 0$. Тогда существуют $\zeta > 0$, $\delta > 0$ такие, что для любого разбиения $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$ отрезка $[\tau_*, \vartheta_0]$, удовлетворяющего условию $d(\Delta) \leq \delta$, существует $K \in \mathbb{N}$ со свойством: для любого $k > K$, любого $x_* \in W_k[\tau_*]$ и всех $x[\cdot] \in Z_\Delta[\tau_*, x_*, \zeta, \hat{U}_k]$*

$$d(x[\vartheta], M[\vartheta]) \leq \varepsilon$$

для некоторого $\vartheta \in [t_0, \vartheta_0]$.

Кроме рассмотренной процедуры управления с поводырем, являющейся аналогом позиционного управления, рассмотренного в разделе 3.2, может быть предоложена следующая схема, использующая информацию о первых k элементах последовательности множеств, построенной по методу программных итераций. Рассмотрим эту схему для случая последовательности $\{\mathcal{W}_k\}_{k=1}^\infty$. Для того, чтобы определить управление с поводырем необходимо определить тройку $\hat{\mathcal{U}}_k^* = (\mathcal{U}_k^*, \psi_k^*, \xi_k^*)$. Функцию, которая формирует управление первого игрока $\mathcal{U}_k^*$, определим формулой (3.3.5). Функцию, которая формирует начальное положение поводыря $\chi_k^*(t_0, x_0)$, построим следующим образом: пусть w_k – ближайший к x_0 элемент $\mathcal{W}_k[t_0]$, положим

$$\chi_k^*(t_0, x_0) \triangleq w_k.$$

Наконец переходную функцию поводыря $\psi_k^*(t^*, t_*, x_*, w_*)$ определим следующим образом. Пусть v_* определяется из (3.3.4), пусть, также, l максимальный номер (не превосходящий k), такой, что $w_* \in \mathcal{W}_l[t_*]$. Тогда существуют мера $\mu_* \in \mathcal{R}_{t_*}$ и $\xi \in [t_*, \vartheta_0]$ со свойством: $\varphi(\xi, t_*, w_*, \mu \odot v_*) \in M[\xi]$ и $\varphi(t, t_*, w_*, \mu \odot v_*) \in \mathcal{W}_{l-1}[t_*]$. Положим,

$$\psi(t^*, t_*, x_*, w_*) \triangleq \phi(t_*, t_*, w_*, \mu \odot v_*).$$

По построению, если $t^* \geq \xi$, то $\psi(t^*, t_*, x_*, w_*) \in \mathcal{W}_{l-1}$. Пусть, теперь, (t_*, x_*) – некоторая позиция, $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, тогда имеем, что движение поводыря, порожденное стратегией $\mathcal{U}_m^*$, в моменты τ_i принадлежат множеству $\mathcal{W}_{m-i}$, если до этого момента движение поводыря не приходит на целевое множество. При этом движение поводыря обязательно приходит на целевое множество. В этом случае справедливо следующее свойство: для любых $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$, $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений отрезка $[t_*, \vartheta_0]$ $\Delta = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ такого, что $d(\Delta) \leq \delta$, и любого $x_* \in \mathcal{W}_m[t_*]$, выполнено свойство:

$$\forall x[\cdot] \in Z_\Delta[t_*, x_*, \mathcal{U}_m^*] \; \exists \xi \in [t_*, \vartheta_0] : \; d(x[\xi], M[\xi]) \leq \varepsilon.$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 7, поэтому мы его опустим.

3.3.2 Свойства управления, экстремального по отношению к паре множеств

Настоящий параграф посвящен доказательству теорем 7 и 8. Доказательства этих теорем очень близки. Поэтому мы ограничимся изложением доказательства теоремы 7.

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Пусть (t_*, x_*) – некоторая позиция, $\Delta = \{\tau\}_{j=0}^m$ – разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$, $\sigma > 0$. Выберем произвольное движение $x[\cdot] \in Z[t_*, x_*, \sigma, \hat{\mathcal{U}}_k]$. С этим движением связано движение поводыря. А именно, в каждый момент τ_j определена точка w_j (положение поводыря). По условию существуют $\xi_j \in [\tau_j, \vartheta_0]$ и $\mu_j \in \mathcal{R}_{\tau_j}$, что

$$\varphi(\xi_j, \tau_j, w_j, \mu_j \odot v_j) \in M[\xi], \tag{3.3.8}$$

$$\varphi(t, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j) \in \mathfrak{W}_k[t] \; \forall t \in [\tau_j, \xi_j], \tag{3.3.9}$$

здесь $v_j \in \operatorname{Argmax}\{\min_{u \in P} \langle w_j - x[\tau_j], f(\tau_j, x[\tau_j], u, v) : v \in Q \rangle\}$.

Существует такой номер j, что $\xi_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. В самом деле, поскольку $\tau_m = \vartheta_0$, $\xi_{m-1} \in [\tau_{m-1}, \tau_m]$. Пусть j^* – наименьший номер число j такой, что момент $\xi_j \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$. Обозначим $\vartheta \triangleq \xi_{j^*}$. Пусть

$$\theta_j \triangleq \begin{cases} \tau_j, & j \leq j^*; \\ \vartheta, & j = j^* + 1. \end{cases}$$

Также введем обозначение

$$w_j^* \triangleq \begin{cases} w_j, & j \leq j^*; \\ \varphi(\vartheta, \tau_{j^*}, w_j, \mu \odot v_{j^*}), & j = j^* + 1. \end{cases}$$

Оценим величину $\|x[\theta_j] - w_j^*\|$. Обозначим

$$\gamma \triangleq \max_{j=\overline{0,m-1}} \mathbf{h}(\mathcal{W}_k[\tau_j], \mathcal{W}_{k+1}[\tau_j]). \tag{3.3.10}$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть $\gamma \leq 1$, тогда существует такая константа $R > 0$, что для всех $j = \overline{0, j^* + 1}$*

$$\|x[\theta_j] - w_j^*\|^2 \leq [\|x[\tau_0] - w_0\|^2 + (\theta_j - \tau_0)(\varphi(\delta) + M_1\sigma) + jR\gamma] \exp \beta(\theta_j - \tau_0). \tag{3.3.11}$$

Здесь константы β, M_1 и функция $\varphi(\cdot)$ определены в утверждении 1.

Доказательство. Зафиксируем $j \in \overline{0, j^*}$. Обозначим через u_j и v_j величины u_* и v_*, определенных согласно (3.3.3) и (3.3.4) для $t_* = \tau_j$, $x_* = x[\tau_j]+r$, $w_* = w_j$ соответственно. Здесь $r \in \mathbb{R}^n$, $\|r\| \leq \sigma$. При построении поводыря выбирается мера $\mu_j \in \mathcal{R}_{\tau_j}$, такая, что выполнены условия (3.3.8) и (3.3.9). Применяя лемму 6 при $\alpha = 0$, мы получаем, что для $t \in [\tau_j, \tau_{j+1}]$

$$\begin{aligned} &\|x[t] - \varphi(t, \tau_j, w_j, \mu_j \odot v_j)\|^2 \leq \\ &\qquad \leq \|x[\tau_j] - w_j\|^2(1 + \beta(t - \tau_j)) + (\varphi(t - \tau_{j+1}) + M_1\sigma)(t - \tau_j). \end{aligned}$$

По определению поводыря и позиции w^*_{j+1}, для $j < j^*$ $w_{j+1} = w^*_{j+1} \triangleq \psi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j)$ есть ближайшая к $\varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu_j \odot v_j)$ точка множества $\mathcal{W}_{k+1}[\tau_{j+1}]$, а $w^*_{j^*+1} = \varphi(\vartheta, \tau_{j^*}, x[\tau_{j^*}], \mu_j \odot v_j)$. Поскольку по выбору меры μ_j $\varphi(t, \tau_j, w_j, \mu_j \odot v_j) \in \mathcal{W}_k[t]$, при $t \in [\tau_j, \vartheta_0]$, и $\theta_{j+1} \in [\tau_j, \vartheta_0]$, из (3.3.10) следует, что

$$\|w^*_{j+1} - \varphi(\theta_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu_j \odot v_j)\| \leq \gamma.$$

Из компактности целевого множества следует, что существует область G_1, такая, что любое движение выходящее из позиции, принадлежащей $\mathcal{W}_1$ не покидает этой области G_1. Обозначим $R = 2\mathrm{diam} G_1 + 1$. Имеем, для $j = \overline{0, j^*}$

$$\begin{aligned}\|x[\theta_{j+1}] - w^*_{j+1}\|^2 \leq [\|x[\theta_{j+1}] - \varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu_j \odot v_j)\| + \\ + \|\varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu \odot v_j) - w_{j+1}\|]^2 \leq \\ \leq \|x[t] - \varphi(\tau_{j+1}, \tau_j, w_j, \mu_j \odot v_j)\|^2 + R\gamma\end{aligned}$$

Отсюда, следует, что

$$\begin{aligned}&\|x[\theta_{j+1}] - w_{j+1}\|^2 \leq \\ &\leq \|x[\tau_j] - w_j\|^2(1 + \beta(\theta_{j+1} - \tau_j)) + (\varphi(\theta_{j+1} - \tau_{j+1}) + M_1\sigma)(\theta_{j+1} - \tau_j) + R\gamma.\end{aligned}$$

Отсюда методом математической индукции с учетом того, что $\theta_{j+1} = \tau_{j+1}$ для $j = \overline{0, j^* - 1}$, получаем утверждение леммы. $\square$

Доказательство теоремы 7. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ со свойством:

$$\varphi(\delta) \leq \frac{\varepsilon^2}{3(\vartheta_0 - t_0)\exp[\beta(\vartheta_0 - t_0)]}.$$

Выберем

$$\zeta \triangleq \frac{\varepsilon^2}{3(M_1(\vartheta_0 - t_0) + 1)\exp[\beta(\vartheta_0 - t_0)]}.$$

Пусть теперь $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ и $\Delta = \{\tau_j\}_{j=0}^m$ – некоторое разбиение отрезка $[t_*, \vartheta_0]$ такое, что

$$\max_{j=\overline{1,m}} (\tau_j - \tau_{j-1}) \le \delta.$$

Выберем

$$\gamma \triangleq \frac{\varepsilon^2}{3(1+mR)\exp[\beta(\vartheta_0 - t_0)]}.$$

По теореме 7, $\mathbf{h}(\mathcal{W}_k[\tau_j], \mathcal{W}_{k+1}[\tau_j]) \to 0$, $k \to \infty$, $j = \overline{0, m-1}$. Следовательно, для каждого j существует L_j такое, что для каждого $l > L_j$ $\mathbf{h}(\mathcal{W}_k[\tau_j], \mathcal{W}_{k+1}[\tau_j]) \le \gamma$. Выберем $K = \max_{j=\overline{0,m-1}} L_j$. Тогда для $k > K$ мы имеем, что если $x_* \in W^{(k+1)}[t_*]$, $x[\cdot] \in Z_\Delta[\tau_*, x_*, \zeta, \hat{\mathcal{U}}_k]$, то

$$\|x[\tau_j] - w_j\|^2 \le \varepsilon^2.$$

Поскольку $w^*_{j^*+1} \in M[\vartheta]$, $d(x[\vartheta], M[\vartheta]) \le \varepsilon$. $\square$

Литература

[1] *Авербух Ю.В.*, Об одном аппроксимативном аналоге правила экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина // Дифференциальные уравнения, 2007, Т. 43, №8, С. 1011–1018.

[2] *Авербух Ю.В., Ченцов А.Г.*, К вопросу о приближенной реализации сечений множеств позицонного поглощения в одной игровой задаче управления // Вестник УГТУ-УПИ (Серия радиотехническая), 2005, № 17 (69), С. 217–230.

[3] *Авербух Ю.В., Ченцов А.Г.*, О характере сходимости в одной процедуре метода программных итераций // Труды семинара “Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби”, 2006, Т. 1, С. 166–175.

[4] *Авербух Ю. В., Ченцов А. Г.*, Об одной оценке, связанной с методом программных итераций // Межрегиональная конференция "Современные математические методы и информационные технологии в образовании". Тезисы докладов, Тюмень, 2005, С. 3-5.

[5] *Авербух Ю. В., Ченцов А. Г.*, Некоторые свойства процедур, связанных с методом программных итераций // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал), № 3, 2005, С. 38-62.

[6] *Авербух Ю.В., Ченцов А.Г.*, Некоторые конструкции, связанные с методом программных итераций в нелинейных задачах управления // Аннотации докладов IX Съезда по теоретической и прикладной механике, Т. 1, С. 8-9.

[7] *Авербух Ю.В.*, К вопросу о структуре множества позиционного поглощения в игровой задаче наведения // Проблемы управления и информатики, № 3, 2006, С. 5-9.

[8] *Авербух Ю.В.*, Один метод построения конфликтно-управляемых систем с заданными свойствами // Тезисы международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Владимир, 2006, С. 16-18.

[9] *Авербух Ю.В.*, Об одной модификации правил экстремального сдвига Н.Н. Красовского и А.И. Субботина // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал), 2006, №4, С. 30-49.

[10] *Авербух Ю.В.*, Метод программных итераций в задачах наведения для автономных конфликтно-управляемых систем // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал), 2007, №1, С. 74-90.

[11] *Авербух Ю.В.*, Достаточные условия непрерывной зависимости сечений множества успешной разрешимости в игровой задаче наведения // Тезисы международной конференции по математической теории управления и механике. Владимир, 2007, С. 4-5.

[12] *Авербух Ю. В.*, О задаче наведения автономной конфликтно-управляемой системы на цилиндрическое множество // Тезисы международной конференции “Моделирование и исследование устойчивости динамических систем”. Киев, 2007, С. 3-4.

[13] *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.*, Геометрическая теория управления. М.: Физматлит. 2005. 392с.

[14] *Айзекс Р.*, Дифференциальные игры. М.: Мир. 1967. 480 с.

[15] *Альбрехт Э. Г.*, Построение приближенных решений некоторых квазилинейных дифференциальных игр // Труды Института математики и механики УрО РАН, 2000, Т. 6, №1. С. 27-38.

[16] *Барабанова (Субботина) Н.Н., Субботин А.И.*, О классах стратегий в дифференциальных играх уклонения от встречи // Прикладная математика и механика, 1971. Т.35, №3. С.385-392.

[17] *Батухтин В. Д.*, Экстремальное прицеливание в нелинейной игре сближения // Доклады АН СССР, 1972. Т. 207, №1. С. 11-14.

[18] *Биллингсли П.*, Сходимость вероятностных мер. М.: Наука. 1977. 352с.

[19] *Борисович Ю.Г.*, Гельман Б.Д., Мышкис А.Д., Обуховский В.В.. Введениев теорию многозначных отображений и дифференциальных включений: М.. КомКнига. 2005.216 с

[20] *Брыкалов С.А.*, Конфликтно управляемые системы и дифференциальные включения // Дифефренциальная уравнения, 2002. Т.38, № 3. С.298-304.

[21] *Брыкалов С.А.*, Непрерывные стратегии в дифференциальных играх // Дифефренциальная уравнения, 2002. Т.38, № 4. С. 453-459.

[22] *Буслинский А.В., Ширяев А.Н.*, Теория случайных процессов. М.: Физматлит. 2003. 400с.

[23] *Варга Дж.*, Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука. 1977. 624 с.

[24] *Гамкрелидзе Р. В.*, Основы оптимального управления. Тбилиси: Издательство Тбилисского университета. 1977. 254 с.

[25] *Григоренко Н.Л.*, Дифференциальные игры преследования несколькими объектами. М.: Издательство МГУ. 1983. 79 с.

[26] *Гусятников П.Б., Половинкин Е.С.*, Простая квазилинейная задача преследования // Прикладная математика и механика, 1980. Т. 44, № 5, С. 771 — 782.

[27] *Дятлов В.П., Ченцов А.Г.*, Управление с гибкими коррекциями при ограничении на общее число перключений // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. 1987. Сборник научных трудов, М.: Наука, 1988, С. 70–75.

[28] *Зеликин М.И.*, Гессиан решения уравнения Гамильтона-Якоби в теории экстремальных задач // Математический сборник, 2004. Т.195, № 6. С.57-70.

[29] *Жуковский В.И., Чикрий А.А.*, Линейно-квадратичные дифференциальные игры. Киев: Наукова Думка. 1994. 320 с.

[30] *Клейменов А. Ф.*, Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука. 1993. 185 с.

[31] *Красовский Н.Н.*, Игровые задачи о встрече движений.. М.: Наука. 1970. 420 с.

[32] *Красовский Н.Н.*, Дифференциальная игра сближения-уклонения – I // Известия АН СССР (Техническая кибернентика), 1973, №2, С. 3–18.

[33] *Красовский Н.Н.*, Дифференциальная игра сближения-уклонения – II // Известия АН СССР (Техническая кибернентика), 1973, №3, С. 22–42.

[34] *Красовский Н.Н.*, Управление динамической системой. Задача о минимуме гарантированного результата.. М.: Наука. 1985. 624 с.

[35] *Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.*, Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикладная математика и механика, 1996. Т.60, №6, С.885-900.

[36] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.*, Альтернатива для игровой задачи движения // Прикладная математика и механика, 1970, Т. 34, №6, С. 1005–1022.

[37] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.*, Аппроксимация в дифференциальной игре // Прикладная математика и механика, 1973, Т. 37, №2, С. 197-204.

[38] *Красовский Н.Н.*, К задаче унификации дифференциальных игр // Доклады АН СССР, 1976, Т.226, № 6. С.1260-1263.

[39] *Красовский Н.Н.*, Унификация дифференциальных игр // Труды Института математики и механики УНЦ АН СССР, Свердловск, 1977. №24: Игровые задачи управления, С. 32-45.

[40] *Красовский Н.Н., Субботин А. И.*, Позиционые дифференциальные игры. М.: Наука. 1974. 455 с.

[41] *Кряжимский А.В.*, К теории позиционных дифференциальных игр сближения-уклонения // Доклады АН СССР, 1978. Т. 239, №4. С. 779-782.

[42] *Кряжимский А. В.*, Об устойчивом позиционном управлении в дифференциальных играх // Прикладная математика и механика, 1978. Т. 42, №6. С. 963–968.

[43] *Кряжимский А. В.*, О некоторых стабильных мостах для линейных управляемых систем // Оптимальное управление системами с неопределенной информацией, ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск. 1980. С. 35-41.

[44] *Куржанский А. Б., Варайя П.*,, О проблеме достижимости при постоянно действующих возмущениях // Доклады РАН, 2000. Т. 372, №4. С. 446-450.

[45] *Ледяев Ю.С., Мищенко Е.Ф.*, Экстремальные задачи в теории дифференциальных игр // Труды МИАН, 185, 147–170, 1988.

[46] *Лукоянов Н.Ю.*, Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов // Прикладная математика и механика, 2004. Т.68, №4. С.629-643.

[47] *Меликян А.А.*, Цена игры в линейной дифференциальной игре сближения // Доклады АН СССН, 1977, Т. 237, №3, С. 521–524.

[48] *Меликян А.А., Черноусько Ф.Л.*, Некоторые минимаксные задачи управления с неполной информацией // Прикладная математика и механика, 1971, Т. 35, № 6, С. 952–961..

[49] *Мищенко Е. Ф*, Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, №5, С. 3-9.

[50] *Невё Ж.*, Математические основы теории вероятностей. М.: Мир. 1969. 312с.

[51] *Никольский М.С.*, Об альтернированном интеграле Л.С. Понтрягина // Математический сборник, 1981, Т. 116, №1, С. 136–144..

[52] *Никольский М. С.*, Нестационарные линейные дифференциальные игры // Кибернетика, 1970, №1, 98–102.

[53] *Никольский М. С.*, О нижнем альтернированном интеграле Понтрягина в линейных дифференциальных играх преследования // Математический сборник, 1985, Т. 128(170) № 1), 35–49.

[54] *Никольский М.С.*, О применении первого прямого метода Понтрягина в играх преследования // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, Т. 10, 51–56, 1972..

[55] *Осипов Ю.С.*, Дифференциальные игры для систем с последействием // Доклады АН СССР, 1971. Т. 196, № 4. С.779-782.

[56] *Остапенко В.В.*, Операторные конструкции и вольтерровские отображения в дифференциальных играх // Кибернетика и системный анализ, 2002. № 5. С.95-99.

[57] *Пацко В. С.*, Поверхности переключения в линейных дифференциальных играх // Современная математика и ее приложения, Тбилиси, 2005. Т. 23, С. 79-122.

[58] *Петров Н.Н.*, Об одной задаче преследования группы убегающих // Автоматика и телемеханика, 1996. №6. С.48-54.

[59] *Петросян Л. А.*, Дифференциальные игры преследования. Л.: Изд-во Ленинградского государственного университета. 1977. 224с.

[60] *Понтрягин Л.С.*, О линейных дифференциальных играх. I // Доклады АН СССР, 1967 Т. 174, №6.

[61] *Понтрягин Л.С.*, О линейных дифференциальных играх. II // Доклады АН СССР, 1967, Т. 175, №4.

[62] *Понтрягин Л. С., Мищенко Е.Ф.*, Линейные дифференциальные игры // Доклады АН СССР, 1967. Т. 174, № 1, С. 27–29.

[63] *Понтрягин Л. С., Мищенко Е.Ф.*, Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх // Дифференциальные уравнения, 1971, Т. 7, №3. С. 436–445.

[64] *Понтрягин Л. С., Мищенко А. С.*, Линейная дифференциальная игра преследования (аналитическая теория) // Математический сборник, 1986, Т. 131(173) № 2, 131–158.

[65] *Пшеничный Б.Н.*, Структура дифференциальных игр // Доклады АН СССР, 1969. Т. 184, №2. С. 285–287.

[66] *Пшеничный Б.Н., Сагайдак М.И.*, О дифференциальных играх с фиксированным временем // Кибернетика, 1970. № 2, С.54-63.

[67] *Рузаков В.Я., Ченцов А.Г.*, Об одной линейной дифференциальной игре сближения с невыпуклым целевым множеством // Дифефренциальная уравнения, 1984. Т.20, № 4. С. 593-597.

[68] *Субботина Н.Н.*, Универсальные оптимальные стратегии в позиционных дифференциальных играх // Дифефренциальная уравнения, 1983. Т.19, № 11. С. 1890–1896.

[69] *Субботина Н.Н.*, Метод характеристик Коши и обобщенные решения уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана // Доклады АН СССР, 1991. Т.320, № 3. С. 556-561.

[70] *Субботина Н.Н., Субботин А.И.*, Игровая задача управления при неполной информации // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1977. № 5. С.14-23.

[71] *Субботин А.И.*, Обобщенные решения дифференциальных уравнений 1-го порядка. Ижевск: РХД. 2003. 336 с.

[72] *Субботин А.И., Ченцов А.Г.*, Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука. 1981. 288с.

[73] *Субботин А.И., Ченцов А.Г.*, Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби и ее обобщения // Труды МИ РАН, 1999. Т. 224. С. 311–334.

[74] *Субботин А.И.*, Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с полной памятью // Доклады АН СССР, 1972. Т.206, № 3. С.552-555.

[75] *Субботин А.И.*, Дифференциальные игры с полной памятью // Экстремальные стратегии в позиционных дифференциальных играх: Сб. ст. Свердловск, 1974, С.211-223.

[76] *Тарасьев А.М.*, Аппроксимационные схемы построения минимаксных решений уравнения Гамильтона-Якоби // Прикладная математика и механика, 1994, Т. 58, № 1, С 22–36.

[77] *Третьяков В. Е.*, К теории стохастических дифференциальных игр // Доклады АН СССР , 1983. Т. 269, №3. С. 1049-1053.

[78] *Ухоботов В.И.*, Построение стабильного моста для одного класса линейных игр // Прикладная математика и механика, 1977. Т. 41, №2, С. 358–364.

[79] *Ухоботов В.И.*, К построению стабильного моста в игре удержания // Прикладная математика и механика, 1981. Т. 45, №2, С. 237–240.

[80] *Ухоботов В.И.*, К вопросу об окончанию игры за первый момент поглощения // Прикладная математика и механика, 1984. Т. 48, №6, С. 892–897.

[81] *Ушаков В. Н.*, К задаче построения стабильных мостов в дифференциальной игре сближения-уклонения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1980. Т. 219, №4. С. 29–36.

[82] *Ушаков В.Н., Латушкин Я.А.*, Дефект стабильности множеств в игровых задачах управления // Труды ИММ УрО РАН, 2006, Т. 12, № 2, С. 178-194.

[83] *Халмош П.*, Теория меры. М.: Издательство иностранной литературы. 1953. 282с.

[84] *Хеннекен П.Л., Тортра А.*, Теория вероятностей и ее приложения. М.: Наука. 1974. 472с.

[85] *Ченцов А.Г.*, О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады АН СССР, 1975, Т. 224, №6, С. 1272–1275.

[86] *Ченцов А.Г.*, Об игровой задаче сближения в заданный момент времени // Математический сборник, 1976, Т. 99, №3, С.394–420..

[87] *Ченцов А.Г.*, К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР, 1976, Т. 226, №1, С. 73–76.

[88] *Ченцов А.Г.*, К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений // Известия ВУЗов. Математика, 2000, №3, С. 66–76.

[89] *Ченцов А.Г.*, Метод программных итераций в абстрактных задачах управления // Прикладная математика и механика, 2004, Т. 68, №4, С. 573–585.

[90] *Ченцов А.Г.*, Метод программных итераций для дифференциальной игры сближения-уклонения // Депонировано в ВИНИТИ 1933-79Деп, 1979, Свердловск, 103 стр..

[91] *Ченцов А.Г.*, О дифференциальных играх с ограниченим на число коррекций, I // Депонировано в ВИНИТИ 5272-80Деп., 1979, Свердловск, 53 стр.

[92] *Ченцов А.Г.*, О дифференциальных играх с ограничением на число коррекций, II // Депонирована в ВИНИТИ №5406-80Деп., 1980, Свердловск, 56 стр.

[93] *Ченцов А.Г.*, Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций // Дифференциальные уравнения, 2001, Т. 37, № 4, С. 470–480.

[94] *Ченцов А.Г.*, Неупреждающие многозначные отображения и их построение с помощью метода программных итераций, II // Дифференциальные уравнения, 2001, Т. 37, № 5, С. 679–688.

[95] *Ченцов А.Г.*, К вопросу о согласованности различных версий метода программных итераций // Доклады РАН, 2000. Т.372, № 5. С.600–603.

[96] *Ченцов А.Г.*, К вопросу об итерационной реализации неупреждающих многозначных отображений // Известия ВУЗов. Математика, 2000. № 3. С.66-76.

[97] *Ченцов А.Г.*, Метод программных итераций в классе конечно-аддитивных управлений-мер // Дифефренциальная уравнения, 1997. Т.33, №.11. С.1528–1536.

[98] *Ченцов А.Г.*, О некоторых вопросах структуры дифференциальных игр сближения-уклонения // ИММ УНЦ АН СССР. Свердловск, 1979. Депонировано в ВИНИТИ №205-80Деп., 44 с..

[99] *Ченцов А.Г.*, О реализации метода программных итераций в пространстве мультифункций // Доклады РАН, 2002. Т.385, № 2. С.168–171.

[100] *Ченцов А.Г.*, Об альтернативе в классе квазистратегий для дифференциальной игры сближения-уклонения // Дифференциальные уравнения, 1980. Т.16, № 10. С.1801–1808.

[101] *Чикрий А.А.*, Конфликтно управляемые процессы. Киев: Наукова думка. 1992. 384 с..

[102] *Чистяков С.В.*, К решению игровых задач преследования // Прикладная математика и механика, 1977. Т. 41, № 5, С. 825–832.

[103] *Чистяков С.В.*, Программные итерации и универсальные ϵ-стратегии в позиционной дифференциальной игре // Доклады АН СССР, 1991, Т. 319, №6. С.1333–1335.

[104] *Чистяков С.В.*, О функциональных уравнениях в играх сближения в заданный момент времени // Прикладная математика и механика, 1982, Т. 46, №5.

[105] *Эдвардс Р.*, Функциональный анализ. Теория и приложения. М.: Мир. 1969. 1072с.

[106] *Энгелькинг Р.*, Общая топология. М.: Мир. 1986. 750 с.

[107] *Aubin J.-P.*, Viability theory. Boston: Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhauser Boston, Inc. 1991.543 p

[108] *Averboukh Yu.V., Chentsov A.G*, On Character of Convegence of the Programmed Iteration Method for Control Problem with Elements of Uncertatainty // Functional Differential Equations, 2007, V. 14, No 1, Pp. 21–46.

[109] *Bardi M., Falcone M., Soravia P.*, Numerical Methods for Pursuit-Evasion Games via Viscosity Solutions // Advances in Dynamic Games, Boston, Birkhauser, 1999, vol. 4, Pp. 105-175.

[110] *Bardi M, Capuzzo-Dolcetta I.*, Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia. Boston: Systems & Control: Foundations & Applications. Birkhauser Boston, Inc.. 1997. xviii+570 pp.

[111] *Barron E. N.*, Differential games with maximum cost // Nonlinear analysis, 1990, Vol. 14, No 11, Pp. 971-989.

[112] *Barron E. N., Jensen R.; Menandi J. L.*, Optimal control and differential games with measures // Nonlinear analysis, Vol. 21, N4, Pp. 241–268.

[113] *Basar T, Bernhard P*, H-infinity Optimal Control and Related Minimax Design Problems A Dynamic Game Approach. Boston: Birkhauser. 1995. 428 p.

[114] *Berkovitz L.D.*, Characterization of the values of differential games // Applied Mathematics and Optimization, 1998. Vol. 17, 177-183.

[115] *Blaquiere A., Leitmann G.F*, Quantitative and qualitative games // Mathematics in Science and Engineering, Vol. 58, Academic Press, New York-London 1969, xi+172 pp.

[116] *Breakwell J.V.*, Zero-sum differential games with terminal payoff // Lecture Notes in Control and Information Sciences, Differential games and applications (Proc.Workshop, Enschede, 1977), Springer, Vol. 3, 1977, Pp. 70–95.

[117] *Cardaliaguet P.*, A differential game with two players and one target // SIAM Journal on Control and Optimization, 1996, Vol. 34, N. 4, Pp. 1441-1460.

[118] *Cardaliaguet P.*, Nonsmooth semi-permeable barriers, Isaacs' equation, and application to a differential game with one target and two players // Applied Mathematics and Optimization, Vol. 36, N. 36, Pp. 125-146.

[119] *Cardaliaguet P., Quincampoix M., Saint-Pierre P.*, Set-Valued Numerical Analysis for Optimal Control and Differential Games // Stochastic and Differential Games, Annals of the International Society of Dynamic Games, no. 4, Birkhauser, Boston.1999, Pp. 177-247

[120] *Chen Y. H., Leitmann G.*, Robustness of uncertain systems in the absence of matching assumptions // International Journal of Control, Vol. 45, Pp. 1527-1542.

[121] *Chentsov A.G.*, On a duality of different versions of the programmed iteration method, 1 // Functional Differential Equations, Vol. 9, 2002, N. 3-4, Pp. 289-314.

[122] *Chentsov A.G.*, On a duality of different versions of the programmed iteration method, 2 // Functional Differentional Equations, Vol. 10, N. 1–2, 2003, Pp. 121–161.

[123] *Chentsov A.G., Morina S.I, and Zobnin B.B.*, On some constructions of control by systems with a varying structure // Mathematics and computers in simulation, 1999, Vol. 49, Pp. 319-334.

[124] *Crandall G., Lions P.L.*, Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations // Transactions of the American Mathematical Society, 1983, Vol. 277, No. 1, Pp. 1-42.

[125] *Elliot R.J., Kalton N.*, The Existence of Value for Differential Games // Memoir of the American Mathematical Society, 1972, Vol. 126: iv + 67.

[126] *Evans L.C., Sougandinis P.E.*, Differential Games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations // Indiana University Mathematics Journal, 1984, Vol.33, Pp 773–797.

[127] *Evans L. C., Ishii H.*, Differential games and nonlinear first order PDE on bounded domains // Manuscripta mathematica, 1984, Vol. 49, N. 2, Pp. 109-139.

[128] *Fleming W. H.*, The convergence problem for differential games // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1961. Vol. 3, N. 1. Pp. 102-116.

[129] *Friedman A.*, Differential Games. N. Y.: Wiley Intersci.. 1971. 350p.

[130] *Krasovskii N.N., Chentsov A.G.*, On the design of differential games. I // Problems of Control and Information Theory, 1977, Vol.6, N. 5–6. Pp.381–395.

[131] *Krasovskii N.N., Chentsov A.G.*, On the design of differential games. II // Problems of Control and Information Theory, 1979, Vol.9, N. 1. Pp. 3–11.

[132] *Krasovskii N.N., Subbotin A.I.*, Game-Theoretical Control Problems. New York: Springer. 1988. 517 p.

[133] *Leitmann G.*, On the efficacy of nonlinear control in uncertain linear systems // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, 1981, Vol. 103, Pp. 95-102.

[134] *Lewin J.*, Differential games. (English summary). Theory and methods for solving game problems with singular surfaces. London: Springer-Verlag London, Ltd. 1994. xx+242 pp.

[135] *Lions P.-L., Souganidis P. E.*, Differential Games, Optimal Control and Directional Derivatives of Viscosity Solutions of Bellman's and Isaacs' Equations // SIAM Journal on Control and Optimization, Vol. 23, I. 4 Pages 566-583.

[136] *Mitchel I.M., Bayen A.M., Tomlin C.J.*, A Time-Depend Hamilton-Jacobi Formulation of Reachable Sets for Continuous Dynamic Games // IEEE Transaction on Automatic Control, 2005, Vol. 50, N. 7, Pp. 947–957.

[137] *Roxin E.*, Axiomatic approach in differential games // Journal of Optimization Theory and Application, 1969, Vol. 3, N. 3, Pp. 153–163..

[138] *Ryll-Nardzewski C.*, The theory of pursuit and evasion // Advances in game theory, Annals of Mathematics Studies, Princeton Univ. Press, 1964, Pp. 113-126.

[139] *Soravia P*, H^∞ Control of Nonlinear Systems: Differential Games and viscosity Solutions // SIAM Journal on control and optimization, 1996, Vol. 34; N. 3, Pp. 1071-1097.

[140] *Varaiya P.*, On the existence of solutions to a differential game // SIAM on Journal Control and Optimization, 1967. Vol. 5, Pp. 153–162.

[141] *Varaiya P., J. Lin*, Existence of saddle points in differential games // SIAM Journal on Control and Optimization, 1969. Vol. 7, N. 1. Pp. 141–157.